

1 演習問題 (自習用問題. 必ず解いてみること.)

- 1 次の行列が簡約行列ではない理由として, 要点 (1) の (i)~(iv) のどれに反するかを全て選んで答えよ. さらに, 何回かの行基本変形で簡約行列に変形せよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- 2 以下は任意の行列を簡約化できる一つの手順である:

- 初めは第 1 行に注目する.
- 注目する行かそれより下の行のうち, 主成分が一番左にある行 (複数ある場合は後で主成分を 1 とするのに都合のよい行) を (R2) を用いて注目する行と交換する (動かさない場合もある).
- その主成分が 1 でなかったら注目する行に (R1) (または (R3)) を適用して 1 にする.
- その主成分がある列に (その主成分以外で) 0 でない成分があれば (R3) を用いて 0 にする.
- 注目する行より下の行にある成分が全て 0 なら終了. そうでなければ注目する行を 1 つ下げて (b) に戻る.

下の行列について, この手順に従って簡約化を行った. 空欄を埋めよ (記法は要点 (2) に従うこと).

$$\begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \square & \square \\ 0 & \square & \square \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -14 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \square \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 3 次の行列を何回かの行基本変形で簡約行列に変形し, 階数を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 15 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 3 & 16 \\ 5 & 1 & 1 & 7 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -9 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- 4 行列 A に行基本変形を (何回か) 施した結果が B となると, $MA = B$ を満たす正則行列 M (基本行列の積で表される) が存在する (線形教科書 pp. 43-46 参照). 以下の「行基本変形 (の繰り返し)」について, M に相当する行列を記せ.

[例] 2×2 行列に対して, 「第 1 行と第 2 行を入れ換え, 次に第 2 行を -3 倍する」

[解] 基本行列は 2×2 型, $A \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} \bullet \xrightarrow{(-3) \times \textcircled{2}} B$ なので, $B = P_2(-3)P_{12}A$. 従って,

$$M = P_2(-3)P_{12} = P_2(-3) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

ここで, $P_{12}, P_2(-3)$ は, 基本行列を表す記号 (教科書 p. 43).

- 3×2 行列に対して, 「第 1 行に第 2 行の -5 倍を加える」
- 3×4 行列に対して, 「第 3 行を 2 倍し, 次に第 1 行と第 3 行を入れ換える」
- 4×3 行列に対して, 「第 2 行に第 4 行の 5 倍を加え, 次に第 1 行を -3 倍をし, 更に第 1 行と第 4 行を入れ換え, 最後に第 2 行に第 1 行の 2 倍を加える」

5 次の行列の階数を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} a-5 & 4 \\ -2 & 2 \\ -3 & a+2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

(ヒント: 変数 a, b, c, d を含むので, 場合分けが必要となる場合がある.)

6 (レポート問題)

行列 $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 & 33 \\ 1 & 2 & -2 & 9 \\ 2 & 7 & 3 & 13 \\ 1 & -1 & -9 & 14 \end{bmatrix}$ を何回かの行基本変形で簡約行列に変形し, 階数を求めよ.

7 (レポート問題)

行列 $\begin{bmatrix} a+2 & 1 \\ -5 & a-3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ の階数を求めよ.