数学演習第一（演習第 4 回）【解答例】

線形：行列の基本変形, 簡約行列, 行列の階数 (2022 年 5 月 25 日実施)

1 演習問題

$\boxed{1}$ (1) 第 1 行の主成分が 1 でないので (ii) に反する．また，第 2 行の主成分が第 1 行の主成分より左にあるので (iii) に反する． $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)\times①} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(2) 第 1 行と第 2 行の主成分が 1 でないので (ii) に反する． $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\times②]{\frac{1}{2}\times①} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 5/2 \end{bmatrix}$.

(3) 第 2 行は零ベクトルであるが, 第 3 行は非零ベクトルであるため (i) に反する．また, 第 3 行の主成分が第 2 列にあるが, 第 2 列には他にも 0 でない成分があるため (iv) に反する．

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{②\leftrightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{①+2\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(4) 第 1 行は零ベクトルであるが, 第 2 行は非零ベクトルであるため (i) に反する．また, 第 2 行の主成分が 1 でないので (ii) に反する．さらに, 第 3 行の主成分が第 2 行の主成分より左にあるので (iii) に反する．最後に，第 2 行の主成分が第 4 列にあるが, 第 4 列には他にも 0 でない成分があるため (iv) に反する．

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5}\times②]{①\leftrightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{①-4\times②} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{2}$ $\begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-7\times①]{②-6\times①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -14 \\ 0 & -7 & -14 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{7}\times②} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -14 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+7\times②]{①-2\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{3}$ 簡約行列の主成分を枠で囲んで示しておく．簡約行列の主成分の個数がもとの行列の階数である．スペースの関係で省略するが, これ以外の手順もあり得る．

(1) $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}\times②]{\frac{1}{3}\times①} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{②-①} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

階数は 1.

(2) $$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-1\times②} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{②-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[①+\frac{3}{2}\times②]{③+②}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-\frac{1}{2})\times②} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1/2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

階数は 2.

(3) $$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 3 & 16 \\ 5 & 1 & 1 & 7 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -9 \\ 5 & 1 & 1 & 7 & 11 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-4\times①]{②-5\times①} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 6 & -4 & 2 & 56 \\ 0 & 7 & -3 & -1 & 52 \end{bmatrix} \xrightarrow{②-③}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & -3 & -1 & 52 \end{bmatrix} \xrightarrow{-②} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 7 & -3 & -1 & 52 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-7\times②]{①+②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & 20 & 80 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{10}\times③}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow[②-③]{①-2\times③} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -8 \end{bmatrix}.$$ 階数は 3.

(4) $$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\times③]{\substack{\frac{1}{3}\times① \\ -\frac{1}{2}\times②}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[④-2\times③]{②-①} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{②\leftrightarrow③}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{③\leftrightarrow④} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{階数は } 3.$$

注意: $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ の形の行列の簡約行列は, A, B の簡約行列を A', B' とおくと, $\begin{bmatrix} A' & O \\ O & B' \end{bmatrix}$ で行零ベクトルを下に集めたものになる.

$\boxed{4}$ (1) 基本行列は 3×3 行列. $A \xrightarrow{①+(-5)\times②} B$ なので, $B = P_{12}(-5)A$. 従って, $M = P_{12}(-5) = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) 基本行列は 3×3 行列. $A \xrightarrow{2\times③} \bullet \xrightarrow{①\leftrightarrow③} B$ なので, $B = P_{13}P_3(2)A$. 従って,

$$M = P_{13}P_3(2) = P_{13} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

積を「計算」する必要はなく, P_{13} に対応する行基本変形を施せばよいことに注意.

(3) 基本行列は 4×4 行列. $A \xrightarrow{②+5\times④} \bullet \xrightarrow{(-3)\times①} \bullet \xrightarrow{①\leftrightarrow④} \bullet \xrightarrow{②+2\times①} B$ なので,
$B = P_{32}(-3)P_{14}P_{21}(2)P_{24}(5)A$. 従って,

$$M = P_{21}(2)P_{14}P_1(-3)P_{24}(5) = P_{21}(2)P_{14}P_1(-3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= P_{21}(2)P_{14} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_{21}(2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{5}$ 階数が判った時点で計算を終了してよい (階数を求めるだけなら簡約行列まで変形する必要はない).

(1) $$\begin{bmatrix} a-5 & 4 \\ -2 & 2 \\ -3 & a+2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-\frac{1}{2})\times②} \begin{bmatrix} a-5 & 4 \\ 1 & -1 \\ -3 & a+2 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a-5 & 4 \\ -3 & a+2 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+3\times①]{②-(a-5)\times①} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & a-1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix}$$

よって,

- $a \neq 1$ のとき階数は 2,
- $a = 1$ のとき階数は 1.

(2) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-a^2\times①]{②-a\times①} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-(b+a)\times②} B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) \end{bmatrix}.$$

- $a \neq b$ のとき, $b \neq c$ かつ $c \neq a$ ならば階数は 3, $b = c$ または $c = a$ ならば階数は 2 である.
- $a = b$ のとき, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-(c-a)\times②} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 従って, $c \neq a$ ならば階数は 2, $c = a$ ならば階数は 1 である.

以上をまとめて,

- a, b, c の全て異なれば階数は 3,
- いずれか二つが一致し, もう一つが異なるならば階数は 2,
- 全てが一致する $(a = b = c)$ ならば階数は 1.

《補足》簡約行列は以下の通り.

- a, b, c がすべて異なるとき $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (階数は 3)

- $a \neq b = c$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b \neq a = c$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $a = b \neq c$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (階数は 2)
- $a = b = c$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (階数は 1)

(3)
- $a \neq 0$ のとき, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/a)\times①} \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{②-c\times①} \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & (ad-bc)/a \end{bmatrix}$ より,
  $ad - bc \neq 0$ なら階数は 2, $ad - bc = 0$ なら階数は 1 である.
- $c \neq 0$ のとき, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow③} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/c)\times①} \begin{bmatrix} 1 & d/c \\ a & b \end{bmatrix} \xrightarrow{②-a\times①} \begin{bmatrix} 1 & d/c \\ 0 & -(ad-bc)/c \end{bmatrix}$ より,
  $ad - bc \neq 0$ なら階数は 2, $ad - bc = 0$ なら階数は 1 である.
- $a = c = 0$ のとき, $b \neq 0$ なら $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/b)\times①} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & d \end{bmatrix} \xrightarrow{②-d\times①} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 階数は 1.
  同様に, $d \neq 0$ なら $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{bmatrix} 0 & d \\ 0 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/d)\times①} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{②-b\times①} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 階数は 1.
- $a = b = c = d = 0$ のとき, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 階数は 0.

以上をまとめて,
- $ad - bc \neq 0$ ならば階数は 2,
- $ad - bc = 0$ かつ $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$ ならば階数は 1,
- $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$ ならば階数は 0.

《補足》簡約行列は以下の通り.
- $ad - bc \neq 0$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. (階数は 2)
- $ad - bc = 0$ かつ $a \neq 0$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $ad - bc = 0$ かつ $c \neq 0$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & d/c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. (階数は 1)
  (注: $ad - bc = 0$ かつ $ac \neq 0$ ならば $b/a = d/c$.)
- $(a, c) = (0, 0)$ かつ $(b, d) \neq (0, 0)$ のとき $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. (階数は 1)
- $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$ のとき $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. (階数は 0)

$\boxed{6}$ 簡約行列の主成分を枠で囲んで示しておく. 簡約行列の主成分の個数がもとの行列の階数である. スペースの関係で省略するが, これ以外の手順もあり得る.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 & 33 \\ 1 & 2 & -2 & 9 \\ 2 & 7 & 3 & 13 \\ 1 & -1 & -9 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}\times①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 1 & 2 & -2 & 9 \\ 2 & 7 & 3 & 13 \\ 1 & -1 & -9 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{③-2\times① \\ ④-①}]{②-①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 9 & -9 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-\frac{1}{3})\times④]{\frac{1}{3}\times③} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{②\leftrightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[④-②]{①-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & 17 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{②-3\times③ \\ ④+③}]{①+9\times③} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって, 簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ で, 階数は 3.

$\boxed{7}$ $\begin{bmatrix} a+2 & 1 \\ -5 & a-3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & a-3 \\ a+2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-(a+2)\times①]{②+5\times①} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a+2 \\ 0 & -a-1 \end{bmatrix}$.

よって, a の値に依らず階数は 2.