

数学演習第一（演習第5回）

微積：極値、関数の増減、ロピタルの定理

2022 年 6 月 1 日

要点 1

極値 (微積教科書 p.32 参照)

- 関数 $f(x)$ が $x = c$ で極大であるとは, c を含む開区間 J が存在し,

$$f(x) < f(c) \quad (x \in J, x \neq c)$$

を満たすことをいう. すなわち, $f(x)$ を J に制限すると, J では $f(x)$ は $x = c$ でのみ最大値をとる. このとき, $f(c)$ を c における $f(x)$ の極大値という.

- 関数 $f(x)$ が $x = c$ で極小であるとは, c を含む開区間 J が存在し,

$$f(x) > f(c) \quad (x \in J, x \neq c)$$

を満たすことをいう. すなわち, $f(x)$ を J に制限すると, J では $f(x)$ は $x = c$ でのみ最小値をとる. このとき, $f(c)$ を c における $f(x)$ の極小値という.

- 極大値および極小値を合わせて極値という.

要点 2

関数の増減 (微積教科書 p.34 定理 2.2.5)

- (1) 関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続であり, (a, b) で微分可能なとき,

$$f'(x) > 0 \quad (a < x < b) \text{ ならば } f(a) < f(b) \text{ であり,}$$

$$f'(x) < 0 \quad (a < x < b) \text{ ならば } f(a) > f(b) \text{ である.}$$

- (2) 関数 $f(x)$ が区間 I で微分可能とする. $f'(x) > 0$ ならば $f(x)$ は単調増加であり, $f'(x) < 0$ ならば単調減少である.

要点 3

ロピタルの定理 (微積教科書 p.36 定理 2.2.7)

$f(x), g(x)$ は $x = a$ の近くで (a を除いて) 定義されていて, 微分可能とする. このとき,

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i) } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ または } \infty, \\ \text{(ii) } a \text{ の近くで } g'(x) \neq 0, \\ \text{(iii) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ が存在する } (\pm\infty \text{ でも可}) \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

【注意】

- 便宜上, (i) の極限 0 の場合を $\frac{0}{0}$ 型の不定形, 極限 ∞ の場合を $\frac{\infty}{\infty}$ 型の不定形と呼ぶ.
- $x \rightarrow a$ を $x \rightarrow a + 0$ (右極限), $x \rightarrow a - 0$ (左極限), あるいは $x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$ (無限遠での極限) に置き換えても定理は成り立つ. 但し, 条件の中の“ a の近くで”は次のように読み替える必要がある: 例えば, $x \rightarrow a + 0$ の場合なら“ a の右側の近くで”, $x \rightarrow \infty$ の場合なら“十分に大きい数以上で”と読み替える.
- (i) の極限 ∞ の場合は, $\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ のそれぞれが $\infty, -\infty$ のいずれかであると読み替えてよい.
- (ii) の条件は教科書には書かれていないが, この条件が必要な理由が 5 に示されている.

1 演習問題

1 次の関数の増減を調べ、極値を求めよ.

$$(1) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \quad (2) f(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}(2 - x)$$

2 次の極限値を求めよ. ただし, a, b は正の定数とする. ((1), (2), (3) は演習書 問題 3.2.2)

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} x \log \frac{x-1}{x+1} \quad (2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2^{\sin x} - 2}{\log(\sin x)} \quad (3) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log(\sin ax)}{\log(\sin bx)}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} \quad (5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \tan^{-1} x \right)^x \quad (6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\tan x - \frac{1}{\cos x} \right)$$

3 関数 $f(x) = \frac{(x+1)\log(x+1)}{\sqrt[3]{x}}$ ($x > -1, x \neq 0$) について, 次の手順でグラフを完成させよ.

- (1) $\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x)$ を求めよ.
- (2) $\lim_{x \rightarrow -0} f(x)$ 及び $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ を計算せよ.
- (3) $-1 < x < 0$ の範囲に $f(x)$ を極大にする x が存在することを確認せよ.
- (4) $x > 0$ における $f(x)$ の増減を調べよ.
- (5) (1)–(4) の結果から $y = f(x)$ のグラフの概形を描け.

4 関数 $g(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{(\sin^{-1} x)^2}$ ($-1 < x < 1, x \neq 0$) について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $(\sin^{-1} x)^2 \geq \sin^2 x$ (等号は $x = 0$ のとき) が成り立つことを示せ.
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{\sin x}$ 及び $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x - \sin x}{\sin^3 x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$ を求めよ.
- (3) (2) を利用して $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ を求めよ.

5 関数 $\varphi(x) = x^4 \left(\cos \frac{1}{x^2} + 2x^2 \sin \frac{1}{x^2} \right), \psi(x) = x^3 \left(4 + 3x^2 \sin \frac{2}{x^2} \right)$ ($x \neq 0$) について以下の問いに答えよ. (この問題はロピタルの定理の適用限界を示す 1 つの例)

- (1) $\varphi'(x), \psi'(x)$ を計算せよ.
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \psi'(x) = 0$ であることを示せ.
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}$ を求めよ. 但し, $\varphi'(x)$ は $x = 0$ の近くに無数の零点をもつが, $\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}$ については約分することにより $x \neq 0$ で定義された関数と見なせる.
- (4) $f(x) = \varphi(x) + \psi(x), g(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ とおけば, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ であり, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (約分して考える) はともに存在するが, その値は異なる. これを示せ.

この問題は <http://kobayashi.hub.hit-u.ac.jp/topics/lhopital.pdf> を参考にした.

2 レポート課題

答だけでなく考え方 (計算過程) も書いて下さい.

問題 1 関数 $f(x) = x^2 e^{-|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$) のすべての極値と各極値を与える x の値を求めよ.

問題 2 関数 $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \operatorname{Tan}^{-1} x$ ($x \in \mathbb{R}$) の増減を調べよ.

問題 3 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Cos}^{-1} x - \frac{\pi}{2}}{\sin x}$ を求めよ.

問題 4 極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \left(\frac{1}{x^2} \right)$ を求めよ.