

数学演習第一（演習第5回）【解答例】

微積：極値、関数の増減、ロピタルの定理（2022年6月1日実施）

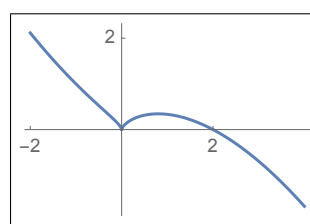
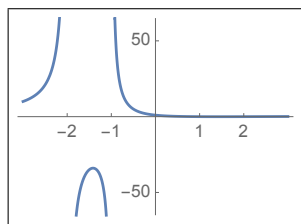
1 演習問題

- 1 (1) まず, $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}$ は $x \neq -2, -1$ で連続かつ微分可能であることに注意する. $x \neq -2, -1$ において $f(x) = 1 - \frac{6x}{x^2 + 3x + 2}$ を微分すると, $f'(x) = \frac{-6(x^2 + 3x + 2) + 6x(2x + 3)}{(x^2 + 3x + 2)^2} = \frac{6(x^2 - 2)}{(x^2 + 3x + 2)^2}$.
 また, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2 \pm 0} f(x) = \mp\infty$ (複号同順) であるから $f(x)$ の増減表は以下の通り. よって, 極大値は $f(-\sqrt{2}) = \frac{4+3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}} = -17-12\sqrt{2}$, 極小値は $f(\sqrt{2}) = \frac{4-3\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}} = -17+12\sqrt{2}$ である. グラフは左下の図の通り.

x	$-\infty$	$\cdots$	$-2-0$	$-2+0$	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-1-0$	$-1+0$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$	0	+	∞	∞	+	0	-	$-\infty$	$-\infty$	-	0	+	0
$f(x)$	1	$\nearrow$	∞	$-\infty$	$\nearrow$	極大値	$\searrow$	$-\infty$	∞	$\searrow$	極小値	$\nearrow$	1

- (2) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で連続, $x \neq 0$ において微分可能であり, 導関数は $f'(x) = \frac{2}{9}x^{-\frac{1}{3}}(2-x) - \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{4-5x}{9\sqrt[3]{x}}$.
 よって, $x < 0$ ならば $f'(x) < 0$, $0 < x < 4/5$ ならば $f'(x) > 0$, $4/5 < x$ ならば $f'(x) < 0$ である. また, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \mp\infty$ (複号同順), $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ である. 以上のことから $f(x)$ の増減表は以下のようになり, 極大値は $f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\left(2 - \frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$, 極小値は $f(0) = 0$ である. グラフは右下の図の通り.

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4}{5}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		-		+	0	-	
$f(x)$	∞	$\searrow$	極小値	$\nearrow$	極大値	$\searrow$	$-\infty$



- 2 ロピタルの定理を用いた箇所を $\star$ で表す.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} x \log \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x-1) - \log(x+1)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\star}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{(x-1)(x+1)} = -2.$$

【別法】 $t = \frac{1}{x}$ とおけば $x \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow +0$ であり,

$$x \log \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{t} \log \frac{1-t}{1+t} = \frac{\log(1-t)}{-t} \cdot (-1) - \frac{\log(1+t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +0]{x \rightarrow \infty} -1 - 1 = -2.$$

$$(2) y = \sin x \text{ において, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2^{\sin x} - 2}{\log(\sin x)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{2^y - 2}{\log y} \stackrel{\star}{=} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{2^y \log 2}{\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow 1} y 2^y \log 2 = 2 \log 2.$$

【別法】 $t = \sin x - 1$ とおけば $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ のとき $t \rightarrow 0$ であり,

$$\frac{2^{\sin x} - 2}{\log(\sin x)} = \frac{2^{1+t} - 2}{\log(1+t)} = \frac{t}{\log(1+t)} \cdot \frac{2(2^t - 1)}{t} = \frac{t}{\log(1+t)} \cdot \frac{e^{t \log 2} - 1}{t \log 2} \cdot 2 \log 2 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 2 \log 2.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log(\sin ax)}{\log(\sin bx)} \stackrel{\star}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{a \cos ax}{\sin ax}}{\frac{b \cos bx}{\sin bx}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{a \cos ax \sin bx}{b \cos bx \sin ax} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} \cdot \frac{\frac{\sin bx}{bx}}{\frac{\sin ax}{ax}} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

【別法】 $x \rightarrow +0$ のとき, $\log x \rightarrow -\infty$, $\log \frac{\sin x}{x} \rightarrow \log 1 = 0$ に注意して,

$$\frac{\log(\sin ax)}{\log(\sin bx)} = \frac{\log \frac{\sin ax}{x} + \log x}{\log \frac{\sin bx}{x} + \log x} = \frac{\frac{\log \frac{\sin ax}{x} + \log a}{\log x} + 1}{\frac{\log \frac{\sin bx}{x} + \log b}{\log x} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow +0} 1.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{6x - 2} = \frac{3}{2}.$$

【別法】 $x \rightarrow 1$ のとき分子、分母がともに 0 に収束するので $x - 1$ を共通因数にもつ。因数分解して、

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{x+2}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{3}{2}.$$

$$(5) \text{ まず, } y = \left(\frac{2}{\pi} \tan^{-1} x\right)^x \text{ の対数を考える. } \log y = x \log \left(\frac{2}{\pi} \tan^{-1} x\right) = \frac{\log \left(\frac{2}{\pi} \tan^{-1} x\right)}{\frac{1}{x}} \text{ であるから,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log y \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2} \tan^{-1} x} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \tan^{-1} x} = -\frac{2}{\pi} \text{ となる. よって, } \lim_{x \rightarrow \infty} y = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

【別法】 $t = \tan^{-1} x - \frac{\pi}{2}$ とおけば, $x = \tan(t + \frac{\pi}{2}) = -\frac{\cos t}{\sin t}$ であり, $x \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow 0$ であるから,

$$\log \left(\frac{2}{\pi} \tan^{-1} x\right)^x = -\frac{\cos t}{\sin t} \log \left(1 + \frac{2t}{\pi}\right) = -\cos t \cdot \frac{t}{\sin t} \cdot \frac{\log(1 + \frac{2t}{\pi})}{\frac{2t}{\pi}} \cdot \frac{2}{\pi} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} -\frac{2}{\pi}.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\tan x - \frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\sin x} = 0.$$

$$\text{【別法】 } \tan x - \frac{1}{\cos x} = -\frac{1 - \sin x}{\cos x} = -\frac{1 - \sin^2 x}{(1 + \sin x) \cos x} = -\frac{\cos x}{1 + \sin x} \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 0.$$

3 ロピタルの定理を用いた箇所を $\stackrel{*}{=}$ で表す.

(1) 分母 $\sqrt[3]{x}$ は $x = -1$ で連続で、値 -1 をとる. 一方、分子の極限は

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} (x+1) \log(x+1) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{\log(x+1)}{\frac{1}{x+1}} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} = - \lim_{x \rightarrow -1+0} (x+1) = 0$$

と計算できる. よって、求める極限は $\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = 0$ である.

【補足】ここでの主張は $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ の形でよく用いられる. $t = -\log x$ とおき, $x \log x = \frac{t}{e^t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{x \rightarrow +0} 0$ と書いてみれば、より納得しやすいだろう.

(2) $x \rightarrow 0$ において $f(x)$ は $\frac{0}{0}$ 型の不定形である. ロピタルの定理を用いると、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1) \log(x+1)}{\sqrt[3]{x}} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1) + 1}{\frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 3(\sqrt[3]{x})^2 \{\log(x+1) + 1\} = 0$$

となり, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ を得る.

$$\text{【別法】 } \frac{(x+1) \log(x+1)}{\sqrt[3]{x}} = (x+1)x^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\log(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \cdot 1 = 0.$$

【注】(1), (2) の結果から、与えられた関数 $f(x)$ は $f(-1) = f(0) = 0$ と定めることにより, $x \geq -1$ で定義された連続関数と見なすことができる. 以下では、こうして得られた $x \geq -1$ 上の連続関数 $f(x)$ を考える.

$$(3) x > -1, x \neq 0 \text{ において, } f'(x) = \frac{(2x-1) \log(x+1) + 3x}{3(\sqrt[3]{x})^4}, f''(x) = \frac{(x-2)\{3x - 2(x+1) \log(x+1)\}}{9(x+1)(\sqrt[3]{x})^7}.$$

ここで, $\varphi(x) = 3x - 2(x+1) \log(x+1)$ とおけば, $\varphi'(x) = 1 - 2 \log(x+1) \geq 1$ ($-1 < x \leq 0$), $\varphi(0) = 0$ であるから, $\varphi(x) < 0$ ($-1 < x < 0$), 従って $f''(x) = \frac{(x-2)\varphi(x)}{9(x+1)(\sqrt[3]{x})^7} < 0$ ($-1 < x < 0$) となり, $y = f(x)$ が $-1 < x < 0$ において上に凸であることが分かる. $f(-1) = f(0) = 0$ であるから, $f(x)$ はこの区間上のただ 1 点 (α とする) で極大になることが分かる.

【別法】 $f'(x)$ の分子を $\psi(x) = (2x-1) \log(x+1) + 3x$ ($x > -1$) とおけば、

$$\psi'(x) = \frac{5x+2}{x+1} + 2 \log(x+1), \quad \psi''(x) = \frac{2x+5}{(x+1)^2} > 0 \quad (x > -1).$$

よって, $x > -1$ において $\psi(x)$ は下に凸の関数. 更に, $x \rightarrow -1+0$ のとき $\psi(x) \rightarrow \infty$, $x = 0$ の近くで

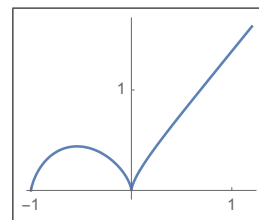
$$\psi(x) = x \left\{ 2 \log(1+x) + 3 - \frac{\log(x+1)}{x} \right\} \approx 2x \quad (\{\dots\} \text{ 内が } 2 \text{ で近似できる})$$

となるので、区間 $-1 < x < 0$ において次を満たす α が一意に存在する: $-1 < x < \alpha$ において $\psi(x) > 0$ ($f(x)$ は単調増加), $\alpha < x < -1$ において $\psi(x) < 0$ ($f(x)$ は単調減少).

(4) (3) で求めた $f'(x)$ を $x > 0$ において考える. $\psi(x) = (2x-1)\log(x+1) + 3x$ ($x > -1$ で定義される) とおけば, $\psi'(x) = 2\log(x+1) + 5 - \frac{3}{x+1} \geq 2$ ($x \geq 0$), $\psi(0) = 0$ であるから, $\psi(x) > 0$ ($x > 0$). 従って $f'(x) = \frac{\psi(x)}{3(\sqrt[3]{x})^4} > 0$ ($x > 0$) となり, $f(x)$ が $x > 0$ において単調増加であることが分かる.

(5) 最後に $x \rightarrow \pm 0$ における $f'(x)$ の極限を調べる. (4) で定めた $\psi(x)$ は $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 2 > 0$ を満たすから, $\lim_{x \rightarrow \pm 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\psi(x)}{3(\sqrt[3]{x})^4} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\psi'(x)}{4\sqrt[3]{x}} = \pm\infty$ (複号同順). また, $\lim_{x \rightarrow -1+0} f'(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ はほとんど明らか. 以上, (1)–(4) と合わせて, 増減表と $y = f(x)$ のグラフは以下の通り.

x	$-1+0$	$\cdots$	α	$\cdots$	-0	$+0$	$\cdots$	∞
$f'(x)$	∞	$+$	0	$-$	$-\infty$	∞	$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	∞



【別法】 $\lim_{x \rightarrow \pm 0} f'(x) = \pm\infty$ について述べる. (3) の別法と同様に, $x = 0$ の近くで

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}} \left\{ 2\log(1+x) + 3 - \frac{\log(x+1)}{x} \right\} \approx \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

となるので主張はほとんど明らか.

4 ロピタルの定理を用いた箇所を $*$ で表す.

(1) $f(x) = \sin^{-1} x - \sin x$ とおくと, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \cos x$ となる. ここで, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geq 1$ かつ $-1 \leq \cos x \leq 1$ から, $f'(x) \geq 0$ となる. ここに, 等号成立は $x = 0$ の時である. また, $f(0) = 0$ であるから $x \geq 0$ の時, $f(x) = \sin^{-1} x - \sin x \geq 0$ で $x \leq 0$ の時, $f(x) = \sin^{-1} x - \sin x \leq 0$ である. 従って, $(\sin^{-1} x)^2 \geq \sin^2 x$ となる.

(2) まず, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (三角関数の微積の基本) より, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$. 次に, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{\sin x} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x} = 1$.
最後に, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x - \sin x}{\sin^3 x} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \cos x}{3\sin^2 x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3\cos x} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \cos x}{\sin^2 x}$
 $\stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3\cos x} \left\{ \frac{\frac{x}{\sin x}}{2\cos x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2\cos x} \right\} = \frac{1}{3}$ となる.

【別法】 $t = \sin^{-1} x$ とおけば, $x = \sin t$ であり, $x \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow 0$ となるから,

$$\frac{\sin^{-1} x}{\sin x} = \frac{t}{\sin(\sin t)} = \frac{t}{\sin t} \cdot \frac{\sin t}{\sin(\sin t)} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{x \rightarrow 0} 1 \cdot 1 = 1.$$

次に, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x - \sin x}{\sin^3 x}$ を考える. ここではロピタルの定理を用いるが, 次のように取り扱う. まず,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x - \sin x}{x^3} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - \cos x}{3x^2} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + \sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{\sin x}{x}}{6} = \frac{1}{3}$$

を計算してから,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x - \sin x}{x^3} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^3 = \frac{1}{3}$$

とするのがよい ($\sin^3 x$ を微分していくと多少形が複雑になる).

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{(\sin^{-1} x)^2} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^{-1} x)^2 - \sin^2 x}{\sin^2 x (\sin^{-1} x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x + \sin x}{\sin x} \frac{\sin^{-1} x - \sin x}{\sin x (\sin^{-1} x)^2} =$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x + \sin x}{\sin x} \frac{\sin^{-1} x - \sin x}{\sin^3 x} \left(\frac{\sin x}{\sin^{-1} x} \right)^2 = \frac{2}{3}$

5 (1) $\varphi'(x) = 4x^3 \left(\cos \frac{1}{x^2} + 2x^2 \sin \frac{1}{x^2} \right) + x^4 \left(\frac{2}{x^3} \sin \frac{1}{x^2} + 4x \sin \frac{1}{x^2} - 2x^2 \cdot \frac{2}{x^3} \cos \frac{1}{x^2} \right) = 2x(1+6x^4) \sin \frac{1}{x^2},$

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= 3x^2 \left(4 + 3x^2 \sin \frac{2}{x^2} \right) + x^3 \left(6x \sin \frac{2}{x^2} - \frac{12}{x} \cos \frac{2}{x^2} \right) = 12x^2 \left(1 - \cos \frac{2}{x^2} \right) + 15x^4 \sin \frac{2}{x^2} \\ &= 24x^2 \sin^2 \frac{1}{x^2} + 30x^4 \cos \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x^2} = 6x^2 \left(4 \sin \frac{1}{x^2} + 5x^2 \cos \frac{1}{x^2} \right) \sin \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

(2) $0 < |x| \leq 1, x \rightarrow 0$ のとき, $|\varphi(x)| \leq x^4(1+2x^2) \leq 3x^4 \rightarrow 0, |\psi(x)| \leq |x|^3(4+3x^2) \leq 7|x|^3 \rightarrow 0,$
 $|\varphi'(x)| \leq 2|x|(1+6x^4) \leq 14|x| \rightarrow 0, |\psi'(x)| \leq 6x^2(4+5x^2) \leq 54x^2 \rightarrow 0.$ よって, 確かに, $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) =$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \psi'(x) = 0.$

(3) $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x(\cos \frac{1}{x^2} + 2x^2 \sin \frac{1}{x^2})}{4 + 3x^2 \sin \frac{2}{x^2}}, \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{3x(4 \sin \frac{1}{x^2} + 5x^2 \cos \frac{1}{x^2})}{1 + 6x^4}$ ($2x \sin \frac{1}{x^2}$ で約分した) であるから,
 $0 < |x| \leq 1, x \rightarrow 0$ のとき, $\left| \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \right| \leq \frac{|x|(1+2x^2)}{4-3x^2} \leq 3|x| \rightarrow 0, \left| \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)} \right| \leq 3|x|(4+5x^2) \leq 27|x| \rightarrow 0.$
 よって, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)} = 0.$

(4) $f(x) = \varphi(x) + \psi(x), g(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ とおけば, (2) の結果を用いて, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$ 実は,
 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 0$ も成り立つ. また, (3) の結果を用いて, $x \rightarrow 0$ のとき,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\varphi(x) + \psi(x)}{\varphi(x) - \psi(x)} = \frac{\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} + 1}{\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - 1} \rightarrow -1, \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\varphi'(x) + \psi'(x)}{\varphi'(x) - \psi'(x)} = \frac{1 + \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}}{1 - \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}} \rightarrow 1.$$

$$\text{よって, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = -1 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2 レポート課題

問題 1 関数 $f(x)$ が偶関数である事を使う. $x > 0$ とする. この時, $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$ となる. $f(x)$ の増減表は以下の通り. $x = \pm 2$ で極大値 $4e^{-2}$ と $x = 0$ で極小値 0

以下では, ロピタルの定理を用いた箇所を $\star$ で表す.

問題 2 $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \tan^{-1} x + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{1+x^2}$ となる. ここで, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x}{x^{\frac{2}{3}}} \star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{x^{-\frac{1}{3}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{1+x^2} = 0$ である. よって $x = 0$ の時のみ $f'(x) = 0$ となる. $f(x)$ の増減は右下の表の通り.

x	$-\infty$	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0		
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

問題 1 の増減表

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

問題 2 の増減表

【別法】 まず, $t = \tan^{-1} x$ とおけば, $x = \tan t$ で, $x \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow 0$ であり,

$$\frac{\tan^{-1} x}{x} = \frac{t}{\tan t} = \frac{t}{\sin t} \cdot \cos t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{x \rightarrow 0} 1. \quad \text{よって, } x^{-\frac{2}{3}} \tan^{-1} x = x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\tan^{-1} x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \cdot 1 = 0.$$

【補足】 区間 I 上で定義された連続関数 $\varphi(x)$ が, 区間内の 1 点 $a \in I$ を除いて C^1 級 (連続微分可能) であるとする. このとき, 極限值 $\lim_{x \rightarrow a} \varphi'(x)$ が存在すれば, $\varphi(x)$ は $x = a$ で微分可能であり, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi'(x) = \varphi'(a)$ が成り立つこと (従って $\varphi(x)$ は I 全体で C^1 級となること) が知られている (ロピタルの定理の簡単な応用). この事実を用いれば, 関数 $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \tan^{-1} x$ は $\mathbb{R}$ 全体で C^1 級である.

問題 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^{-1} x - \frac{\pi}{2}}{\sin x} \star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x} = -1$

【別法】 恒等式 $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ により, $\frac{\cos^{-1} x - \frac{\pi}{2}}{\sin x} = -\frac{\sin^{-1} x}{\sin x}$. この極限は既に 4 で求めた.

問題 4 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \left(\frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \left(\frac{1}{x^2} \right)}{\frac{1}{x}} \star \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \left(\frac{1}{x^2} \right) \left(\frac{-2}{x^3} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cos \left(\frac{1}{x^2} \right)}{x} = 0$

【別法】 $t = \frac{1}{x}$ とおけば, $x \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow 0$ であり, $x \sin \left(\frac{1}{x^2} \right) = \frac{\sin(t^2)}{t} = \frac{\sin(t^2)}{t^2} \cdot t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{x \rightarrow \infty} 1 \cdot 0 = 0.$