

数学演習第一 (演習第 6 回)

線形：連立 1 次方程式

2022 年 6 月 8 日

要点

〈係数行列, 拡大係数行列〉

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

とおき, 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を考える. このとき, 行列 A を係数行列, $[A \ \mathbf{b}]$ を拡大係数行列という. 特に, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合 (すなわち $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$) は 同次連立 1 次方程式と呼ばれる.

〈連立 1 次方程式の解〉 $m \times n$ 行列 A の階数を r とする: $r = \text{rank } A$.

$$\begin{array}{ccc} \text{連立 1 次方程式} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} & \xLeftrightarrow{\text{同値な連立 1 次方程式}} C\mathbf{x} = \mathbf{d} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \text{拡大係数行列} & [A \ \mathbf{b}] & \xrightarrow{\text{簡約化 (行基本変形)}} \cdots \cdots \cdots [C \ \mathbf{d}] \end{array}$$

- 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつための必要十分条件は

$$\text{rank } C = \text{rank } [C \ \mathbf{d}], \quad \text{すなわち} \quad \text{rank } A = \text{rank } [A \ \mathbf{b}] \quad (= r)$$

である. この条件が満たされるとき, $n = r$ ならば $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は一意であり, $n \neq r$ ならば $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は $s = n - r$ 個のパラメータ (任意定数) を含む形で表される. C の主成分に対応しない変数 をパラメータとするのが標準的な解の表示法である.

- 特に, 同次連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合) は $s = n - r$ 個の 1 次独立な解をもつ. この s 個の 1 次独立な解の組を $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の 基本解 と呼ぶ.

〈例〉 連立 1 次方程式
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = b \end{cases} \text{ を解く } (a, b \text{ は定数}).$$

まず, 拡大係数行列に行基本変形を繰り返して,

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & b \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & a+2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & b+1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \end{array} \right] \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{if } a = 0), \quad \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \end{array} \right] \quad (\text{if } a \neq 0). \end{aligned}$$

よって, 上の連立 1 次方程式は, $b \neq -1$ のとき, 解なし. $a = 0, b = -1$ のとき,

$$\begin{cases} \boxed{x_1} - x_3 - x_4 = -1 \\ \boxed{x_2} + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

に簡約化され, $a \neq 0, b = -1$ のとき,

$$\begin{cases} \boxed{x_1} - x_3 = -1 \\ \boxed{x_2} + 2x_3 = 0 \\ \boxed{x_4} = 0 \end{cases}$$

に簡約化される. (ここでは, 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ に対して, 拡大係数行列 $[A \ \mathbf{b}]$ の簡約行列 $[C \ \mathbf{d}]$ を拡大係数行列にもつ連立 1 次方程式 $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ を考えるとき, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ に簡約化される, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を簡約化して $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ を得る, といった言葉遣いをしている.) よって, 求める解は, (簡約化された連立 1 次方程式の) 主成分に対応しない変数をパラメータ (任意定数) として選び,

- $a = 0, b = -1$ のとき,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + s + t \\ -2s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$

- $a \neq 0, b = -1$ のとき,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + t \\ -2t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

- $b \neq -1$ のとき, 解なし.

1 演習問題

1 行列 $[A \ \mathbf{b}]$ の簡約行列が $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ のとき, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$ として次の問いに答えよ.

(1) 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を解け.

(2) A の簡約行列を書け. また, 同次連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解け.

2 次の連立 1 次方程式 (前から順に, 演習書 問題 8.2.9 (2), 問題 8.2.10 (1), (2), (3)) を解け.

$$(a) \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -9 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 13 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -9 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -6 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 13 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

3 次の連立 1 次方程式を解け (a は定数). ((1) は逆行列を, (2) は拡大係数行列の簡約化を用いよ.)

$$(1) \begin{cases} a^2x + (2a - 1)y = 3 \\ (2a + 1)x + 4y = 1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 13x_3 + 4x_4 = a \end{cases}$$

4 次の同次連立 1 次方程式を解け (係数行列の簡約化を利用). 更に, 基本解と解の自由度 (線形教科書 pp.53-56 参照) を求めよ.

$$(1) \begin{cases} -x + 5y + 4z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + z = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

5 ベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ k \\ 3 \end{bmatrix}$ (k は定数) について次の問いに答えよ.

- (1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ が 1 次独立 (すなわち $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 + c_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$) となるような k の条件を求めよ.
- (2) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ が 1 次従属 (すなわち $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 + c_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$ を満たす $(c_1, c_2, c_3, c_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ が存在) となるような k の条件を求めよ. また, そのとき $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ の非自明な 1 次関係式 $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 + c_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$ ($(c_1, c_2, c_3, c_4) \neq (0, 0, 0, 0)$) を 1 つ挙げよ.

[ヒント] $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4]$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$ とおけば, $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 + c_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$ は $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$ と書かれる.

6 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + az = b \\ ax + by + z = 1 \end{cases}$ について以下の問いに答えよ. 但し, a, b は定数とする.

- (1) 係数行列と拡大係数行列の階数を調べよ (a, b の値によって場合分け).
- (2) (1) の場合分けに対応して, 解の個数 (ただ 1 つ, 無数, なし) を調べよ.
- (3) 解を「3 平面の共有点の集合」と見て, 図形的な言葉 (点, 直線, 空集合) で解を表現せよ.

2 レポート問題 (WebClass へ提出)

次の連立 1 次方程式を解け. ただし, (1) は逆行列を用い, (2), (3) は拡大係数行列の簡約化, (4) は係数行列の簡約化を利用せよ. 解が無数に存在する場合は「要点」に書かれた標準的な方法で解を表示すること.

$$\begin{array}{ll} (1) \begin{cases} 5x - 4y = 9 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases} & (2) \begin{cases} x - 2y + 3z = -1 \\ 2x + 3y - z = 5 \\ 4x - y + 5z = 2 \end{cases} \\ (3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 - 4x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 11 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \end{cases} & (4) \begin{cases} x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \end{array}$$