

数学演習第一（演習第6回）【解答例】

線形：連立1次方程式（2022年6月8日実施）

【注】問題の〈例〉と同じく、ここでは、連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ に対して、拡大係数行列 $[A \ \mathbf{b}]$ の簡約行列 $[C \ \mathbf{d}]$ を拡大係数行列にもつ連立1次方程式 $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ を考えるとき、 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ に簡約化される、 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を簡約化して $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ を得る、といった言葉遣いをする。

1 演習問題

1 (1) 連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は

$$\begin{cases} \boxed{x_1} - 4x_3 + x_5 = -3 \\ \boxed{x_2} + 3x_3 - x_5 = 2 \\ \boxed{x_4} + \frac{1}{2}x_5 = 1 \end{cases}$$

と簡約化されるので、主成分に関係しない変数を $x_3 = s, x_5 = t$ において、求める解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 4s - t \\ 2 - 3s + t \\ s \\ 1 - \frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$

【注】解の表示に分数が現れないように $x_5 = 2t$ においてもよい ((2) の解答例はそうにした).

(2) A の簡約行列は明らかに $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であり、同次連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は

$$\begin{cases} \boxed{x_1} - 4x_3 + x_5 = 0 \\ \boxed{x_2} + 3x_3 - x_5 = 0 \\ \boxed{x_4} + \frac{1}{2}x_5 = 0 \end{cases}$$

と簡約化される。よって、 $x_3 = s, x_5 = 2t$ において、求める解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4s - 2t \\ -3s + 2t \\ s \\ -t \\ 2t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$

2 (a) (問題 8.2.9 (2)) 拡大係数行列を簡約化すると、

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 12 \\ 1 & 1 & -2 & -9 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{3}-2\times\textcircled{1}]{\textcircled{2}-\textcircled{1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 12 \\ 0 & 2 & -5 & -21 \\ 0 & 5 & -7 & -25 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{2}\leftrightarrow\textcircled{3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 12 \\ 0 & 5 & -7 & -25 \\ 0 & 2 & -5 & -21 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{2}-2\times\textcircled{3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 17 \\ 0 & 2 & -5 & -21 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow[\textcircled{3}-2\times\textcircled{2}]{\textcircled{1}+\textcircled{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 29 \\ 0 & 1 & 3 & 17 \\ 0 & 0 & -11 & -55 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{11}\times\textcircled{3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 29 \\ 0 & 1 & 3 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{2}-3\times\textcircled{3}]{\textcircled{1}-6\times\textcircled{3}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

よって、連立1次方程式は $\begin{cases} \boxed{x_1} = -1 \\ \boxed{x_2} = 2 \\ \boxed{x_3} = 5 \end{cases}$ と簡約化されるので、求める解は $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

(b) (問題 8.2.10 (1)) 拡大係数行列を簡約化すると、

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & -9 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{3}-\textcircled{1}]{\textcircled{2}-2\times\textcircled{1}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{3}-\textcircled{2}]{\textcircled{1}-\textcircled{2}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -8 & 35 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

よって、連立1次方程式は $\begin{cases} \boxed{x_1} - 8x_3 = 35 \\ \boxed{x_2} + 5x_3 = -22 \end{cases}$ と簡約化されるので、 $x_3 = t$ において、求める解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 + 8t \\ -22 - 5t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ -22 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

- (c) (問題 8.2.10 (2)) 拡大係数行列を簡約化すると, $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 3 \\ -2 & 4 & 6 & -6 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{3}+\textcircled{1}]{\textcircled{2}+2\times\textcircled{1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. よって, 連立 1 次方程式は $\boxed{x_1} - 2x_2 - 3x_3 = 3$ と簡約化されるので, $x_2 = s, x_3 = t$ において, 求める解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 2s + 3t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$

- (d) (問題 8.2.10 (3)) 拡大係数行列を行基本変形して,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{3}-\textcircled{1}]{\textcircled{2}-2\times\textcircled{1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -24 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{3}-\textcircled{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{array} \right].$$

よって, (係数行列の階数) = $2 \neq 3$ = (拡大係数行列の階数) となるので, 解なし.

- 3** (1) 与えられた連立 1 次方程式は $\begin{bmatrix} a^2 & 2a-1 \\ 2a+1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ と書ける. よって,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 2a-1 \\ 2a+1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4a^2 - (4a^2 - 1)} \begin{bmatrix} 4 & -2a+1 \\ -2a-1 & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a+13 \\ a^2-6a-3 \end{bmatrix}.$$

- (2) 拡大係数行列を簡約化して,

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 11 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 13 & 4 & a \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{1}\leftrightarrow\textcircled{2}} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 11 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 13 & 4 & a \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{4}-\textcircled{1}]{\textcircled{2}-2\times\textcircled{1}, \textcircled{3}-\textcircled{1}} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 15 & -7 & 9 \\ 0 & 2 & 10 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 15 & 3 & a+4 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\frac{1}{2}\times\textcircled{3}} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 15 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 15 & 3 & a+4 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{2}\leftrightarrow\textcircled{3}} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 15 & -7 & 9 \\ 0 & 3 & 15 & 3 & a+4 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{4}-3\times\textcircled{2}]{\textcircled{3}-3\times\textcircled{2}} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{-\frac{1}{10}\times\textcircled{3}} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{2}-\textcircled{3}]{\textcircled{1}-\textcircled{3}} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

よって, $a \neq 5$ ならば明らかに解なし. $a = 5$ ならば連立 1 次方程式は $\begin{cases} \boxed{x_1} - 2x_3 = -4 \\ \boxed{x_2} + 5x_3 = 3 \\ \boxed{x_4} = 0 \end{cases}$ と簡約化されるので, 求める解は $x_3 = t$ において

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 + 2t \\ 3 - 5t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

- 4** 係数行列を簡約化して解を求める.

- (1) $\left[\begin{array}{ccc} -1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 11 & 11 \\ 0 & -7 & -7 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -7 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ であるから, 連立 1 次方程式

式は $\begin{cases} \boxed{x} + z = 0 \\ \boxed{y} + z = 0 \end{cases}$ と簡約化される. 解は $z = t$ において

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

これより, 基本解は $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ で解の自由度は 1.

- (2) $\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ であるから, 連立 1 次

方程式は $\begin{cases} \boxed{x_1} + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \boxed{x_2} - \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ と簡約化される. 解は $x_3 = 2s, x_4 = t$ において

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s-t \\ 2s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$

これより, 基本解は $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ で, 解の自由度は 2.

5 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ の 1 次関係式 $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 + c_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$ は c_1, c_2, c_3, c_4 を変数とする同次連立 1 次方程式

$$[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (*)$$

と見なせる. 係数行列を簡約化すると,

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4] &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & k \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & k \\ 0 & 2 & 7 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & k \\ 0 & 2 & 7 & 5 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ が 1 次独立とは (*) の解が $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ に限られることであるから, 求める条件は $k \neq 1$.

(2) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ が 1 次従属とは (*) が自明でない解をもつことであるから, 求める条件は $k = 1$. このとき (*) の解は $c_1 = -t, c_2 = t, c_3 = -t, c_4 = t$ (t は任意定数). 特に, $t = -1$ と選び, 非自明な 1 次関係式 $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$ を得る.

6 説明の便宜のため, 係数行列を $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$, 拡大係数行列を $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & b \\ a & b & 1 & 1 \end{bmatrix}$ とおく. まず, B に行基本変形を施して,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & b \\ a & b & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & b-1 \\ 0 & b-a & 1-a & 1-a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & b-1 \end{bmatrix} (= B_1 \text{ とおく}).$$

(1) $\bullet$ $b \neq a \neq 1$ (i.e., $a \neq b$ かつ $a \neq 1$) のとき, 明らかに $\text{rank } A = \text{rank } B = 3$.

$\bullet$ $b = a = 1$ のとき, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となり, $\text{rank } A = \text{rank } B = 1$.

$\bullet$ $b = a \neq 1$ のとき, $B_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となり, $\text{rank } A = \text{rank } B = 2$.

$\bullet$ $b \neq a = 1$ のとき, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となり, $\text{rank } A = 2, \text{rank } B = 3$.

【注】階数を求めるだけなら上の形まで変形すれば十分. (勿論, 簡約行列まで求めてもよい.)

(2) $\bullet$ $b \neq a = 1$ のとき, $\text{rank } A = 2 < 3 = \text{rank } B$ より, 解なし.

$\bullet$ $b \neq a \neq 1$ のとき,

$$B_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{a-1}{a-b} & \frac{a-1}{a-b} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-1}{a-1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{b-1}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-1}{a-1} \end{bmatrix} \text{ より, } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b-1}{a-1} \\ 1 \\ \frac{b-1}{a-1} \end{bmatrix} \text{ (ただ 1 つの解).}$$

- $b = a \neq 1$ のとき, $B_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (無数の解).
 - $b = a = 1$ のとき, $B_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (無数の解).
- (3)
- $b \neq a = 1$ のとき, 解集合は 空集合.
 - $b \neq a \neq 1$ のとき, 解集合は 1点 $\left(-\frac{b-1}{a-1}, 1, \frac{b-1}{a-1}\right)$.
 - $b = a \neq 1$ のとき, 解集合は点 $(0, 0, 1)$ を通り, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとする直線となる. すなわち, 解集合は 直線 $-x = y, z = 1$.
 - $b = a = 1$ のとき, 解集合は点 $(1, 0, 0)$ を通り, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ に平行な平面となる. 法線ベクトルが $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ で与えられるから, 解集合は 平面 $(x-1) + y + z = 0$, 整理して $x + y + z = 1$.

2 レポート問題

- (1) $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{23} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
- (2) 拡大係数行列を行基本変形して, $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{3}-4 \times \textcircled{1}]{\textcircled{2}-2 \times \textcircled{1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -7 & 7 \\ 0 & 7 & -7 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{3}-\textcircled{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right].$
 (係数行列の階数) $= 2 \neq 3 =$ (拡大係数行列の階数) であるから, 解なし.

- (3) 拡大係数行列を簡約化すると,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -5 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{3}-2 \times \textcircled{1}]{\textcircled{2}-\textcircled{1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & -10 \\ 0 & -1 & -3 & -11 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{2} \leftrightarrow \textcircled{4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -11 & -5 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & -10 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[\textcircled{4}+2 \times \textcircled{2}]{\textcircled{1}-2 \times \textcircled{2}, \textcircled{3}+\textcircled{2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{10} \times \textcircled{3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{2}-\textcircled{3}]{\textcircled{1}-\textcircled{3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

連立1次方程式は $\begin{cases} \boxed{x_1} - 4x_3 = -2 \\ \boxed{x_2} + 3x_3 = 5 \\ \boxed{x_4} = 0 \end{cases}$ と簡約化されるので, $x_3 = t$ とおいて, 求める解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 4t \\ 5 - 3t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

- (4) 係数行列を簡約化すると,

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{3}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{4}-\textcircled{3}]{\textcircled{2}-3 \times \textcircled{1}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow[\textcircled{4}-\textcircled{2}]{\textcircled{3}-\textcircled{2}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

連立1次方程式は $\begin{cases} \boxed{x_1} + x_3 + x_4 = 0 \\ \boxed{x_2} - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ と簡約化されるので, $x_3 = s, x_4 = t$ とおいて, 求める解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s - t \\ 2s + 2t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$