

数学演習第一（演習第7回）【解答例】

微積：高次の導関数，テーラーの定理，有限テーラー展開（2022年6月22日実施）

1 演習問題

1 $f(x)$ は明らかに $x \neq 0$ において C^∞ 級であり，そこでの導関数は

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

また， $x = 0$ における微分係数は

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0 \quad (\text{最後の等号は } |h \sin(1/h)| \leq |h| \rightarrow 0 \text{ による}).$$

よって， $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で微分可能であり，その導関数は

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

で与えられる．ここで， $x \rightarrow 0$ のとき， $x \sin(1/x) \rightarrow 0$ であるが， $\cos(1/x)$ は 1 つの値に近づき得ないので $f'(x)$ は $x = 0$ で連続でない．（より直接的には，数列 $\{a_n\}$ を $a_n = 1/(n\pi)$ で定めれば， $n \rightarrow \infty$ のとき， $a_n \rightarrow 0$ であるが， $f'(a_n) = -(-1)^n \neq 0 = f'(0)$ であるから， $f'(x)$ は $x = 0$ で連続でない．）よって， $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で微分可能だが， $x = 0$ の周りで C^1 級でない．

2 まず，仮定より $x = \varphi(t)$ の逆関数 $t = \varphi^{-1}(x)$ が存在し， $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ と書ける．よって， y を x で微分すれば，合成関数・逆関数の微分公式を用いて，

$$\frac{dy}{dx} = \{\psi(\varphi^{-1}(x))\}' = \psi'(\varphi^{-1}(x))\{\varphi^{-1}(x)\}' = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad (x = \varphi(t)).$$

次に， $\omega(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ とおけば， $\frac{dy}{dx} = \omega(\varphi^{-1}(x))$ と書けるから，上と同じ論法で $\frac{d^2y}{dx^2} = \{\omega(\varphi^{-1}(x))\}' = \frac{\omega'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$ ．ここで， $\omega'(t) = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'(t)^2}$ より，

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'(t)^3} \quad (x = \varphi(t)).$$

次のように表現することもできる：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^3}.$$

3 (n の範囲がなければ $n \geq 0$ で正しいことを意味する.)

(0) ① $y = e^x$ は微分に対して不変であるから，明らかに $y^{(n)} = e^x$ ．②, ③ $(\cos x)' = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ ， $(\sin x)' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ であるから， $\cos x$ ， $\sin x$ はともに 1 回微分するごとに“偏角”が $\frac{\pi}{2}$ ずつ増えていく．よって， $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$ ， $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$ ．④ $y = x^\alpha$ のとき， $y^{(n)} = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)x^{\alpha-n}$ ($n \geq 1$)．特に， $y = 1/x = x^{-1}$ ($\alpha = -1$) のとき， $y^{(n)} = (-1)(-2) \cdots (-n)x^{-n-1} = (-1)^n n! / x^{n+1}$ ．⑤ $(\log x)^{(n)} = (1/x)^{(n-1)} = (-1)^{n-1} (n-1)! / x^n$ ($n \geq 1$)．

(1) $y' = f'(ax+b) \cdot (ax+b)' = af'(ax+b)$ ．これを繰り返して， $y^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$ ．

(2) $y = \frac{1}{2}(\log(1+x) - \log(1-x)) = \frac{1}{2}(\log(1+x) - \log((-1)x+1))$ より，(0) ⑤ と (1) を用いて， $y = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2} \left\{ \frac{1}{(1+x)^n} - \frac{(-1)^n}{(1-x)^n} \right\}$ ($n \geq 1$)．

(3) $y = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ より，(0) ② と (1) を用いて， $y^{(n)} = \frac{1}{2} \cdot 2^n \cos(2x + \frac{n\pi}{2}) = 2^{n-1} \cos(2x + \frac{n\pi}{2})$ ．

(4) $y = \frac{1}{(1-x)(1+2x)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x} \right)$ と部分分数分解し，(0) ④ と (1) の結果を用いて，

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{1+x-2x^2} \right)^{(n)} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{(-1)^n (-1)^n n!}{(1-x)^{n+1}} + \frac{2 \cdot 2^n (-1)^n n!}{(1+2x)^{n+1}} \right\} = \frac{n!}{3} \left\{ \frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{(1+2x)^{n+1}} \right\}.$$

(5) $y = x^2 e^{-2x}$ より, $y' = 2x e^{-2x} + x^2(-2e^{-2x}) = -2(x^2 - x)e^{-2x}$. $n \geq 2$ のときは Leibniz の公式を用いて,

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} (e^{-2x})^{(n-k)} = x^2 (e^{-2x})^{(n)} + n \cdot 2x (e^{-2x})^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 (e^{-2x})^{(n-2)} \\ &= \{(-2)^n x^2 + 2n(-2)^{n-1} x + n(n-1)(-2)^{n-2}\} e^{-2x} = \underbrace{(-2)^n \left\{ x^2 - nx + \frac{1}{4} n(n-1) \right\}}_{\text{この式は } n=0, 1 \text{ でも正しい}} e^{-2x}. \end{aligned}$$

(6) $y = e^{-x} \cos x$ より, $y' = e^{-x}(-\cos x - \sin x) = -\sqrt{2} e^{-x} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right) = -\sqrt{2} e^{-x} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.
これを繰り返して, $y^{(n)} = (-\sqrt{2})^n e^{-x} \cos \left(x - \frac{n\pi}{4} \right)$. ($\{e^{-x} \cos(x + \alpha)\}' = -\sqrt{2} e^{-x} \cos(x + \alpha - \frac{\pi}{4})$ (α は定数) であることに注意.) Leibniz の公式を用いた表現も可能: $y^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} e^{-x} \cos \left(x + \frac{k\pi}{2} \right)$.

$$(7) y^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(-\frac{1}{2} - (n-1)\right) x^{-\frac{1}{2}-n} = (-1)^n \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{2n-1}{2} x^{-\frac{1}{2}-n} = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n x^{(2n+1)/2}}.$$

4

以下, N 次剰余項 $R_N(x)$ の表現式の中の θ は $0 < \theta < 1$ を満たす適当な数 (x, N に依存) を表す.

(0) ① $f(x) = e^x$ より, $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$ ($n \geq 0$). よって,

$$e^x = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!} + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{e^{\theta x}}{N!} x^N.$$

$$N = 6 \text{ なら, } e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + R_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + R_6(x).$$

$$\textcircled{2} f^{(n)}(x) = \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right), f^{(n)}(0) = \cos \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^m & (n = 2m) \\ 0 & (n = 2m+1) \end{cases} \quad (n \geq 0) \text{ より,}$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} + R_{2M}(x), \quad R_{2M}(x) = \frac{\cos(\theta x + \frac{2M\pi}{2})}{(2M)!} x^{2M} = \frac{(-1)^M \cos \theta x}{(2M)!} x^{2M}.$$

$$M = 3 \text{ なら, } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + R_6(x).$$

$$\textcircled{3} f^{(n)}(x) = \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right), f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & (n = 2m) \\ (-1)^m & (n = 2m+1) \end{cases} \quad (n \geq 0) \text{ より,}$$

$$\sin x = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} + R_{2M+1}(x),$$

$$R_{2M+1}(x) = \frac{\sin(\theta x + \frac{(2M+1)\pi}{2})}{(2M+1)!} x^{2M+1} = \frac{(-1)^M \cos \theta x}{(2M+1)!} x^{2M+1}.$$

$$M = 3 \text{ なら, } \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + R_7(x).$$

$$\textcircled{4} f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} \quad (n \geq 0) \text{ より, } f^{(n)}(0) = (-1)^n n! \quad (n \geq 0). \text{ よって, } x > -1 \text{ に対して,}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x^n + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{(-x)^N}{(1+\theta x)^{N+1}} = \underbrace{\frac{(-x)^N}{1+x}}_{\text{等比数列の和の公式による}}.$$

$$N = 6 \text{ なら, } \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + R_6(x).$$

$$\textcircled{5} f(x) = \log(1+x) \text{ より, } f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n \geq 1). \text{ 故に, } f(0) = 0, f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)! \quad (n \geq 1). \text{ よって, } x > -1 \text{ に対して,}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{(-1)^{N-1}}{N(1+\theta x)^N} x^N.$$

$$N = 6 \text{ なら, } \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + R_6(x).$$

$$(1) \textcircled{3} (7) \text{ の結果から, } f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n (1+x)^{n+\frac{1}{2}}}, f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n}, \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} \quad (n \geq 1)$$

0). よって, $x > -1$ に対して,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{(2N-1)!!}{(2N)!!} \frac{(-x)^N}{(1+\theta x)^{N+\frac{1}{2}}}.$$

$$N=6 \text{ なら, } \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \frac{63}{256}x^5 + R_6(x).$$

(2) $f(x) = \cosh x$ より, $f^{(2m)}(x) = \cosh x, f^{(2m+1)}(x) = \sinh x; f^{(2m)}(0) = 1, f^{(2m+1)}(0) = 1 (m \geq 0)$. 故に,

$$\cosh x = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{(2m)!} x^{2m} + R_{2M}(x), \quad R_{2M}(x) = \frac{\cosh \theta x}{(2M)!} x^{2M}.$$

$$M=3 \text{ なら, } \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + R_6(x).$$

(3) $f(x) = \sinh x$ より, $f^{(2m)}(x) = \sinh x, f^{(2m+1)}(x) = \cosh x; f^{(2m)}(0) = 0, f^{(2m+1)}(0) = 1 (m \geq 0)$. 故に,

$$\sinh x = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{(2m+1)!} x^{2m+1} + R_{2M+1}(x), \quad R_{2M+1}(x) = \frac{\cosh \theta x}{(2M+1)!} x^{2M+1}.$$

$$M=3 \text{ なら, } \sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + R_7(x).$$

5 $n \geq 2$ のとき, $f(x) = x^2 \cos x$ に Leibniz の公式を適用して,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= x^2 (\cos x)^{(n)} + n \cdot 2x (\cos x)^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 (\cos x)^{(n-2)} \\ &= x^2 \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) + 2nx \cos \left(x + \frac{(n-1)\pi}{2} \right) + n(n-1) \cos \left(x + \frac{(n-2)\pi}{2} \right) \\ &= x^2 \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) + 2nx \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + n(n-1) \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} - \pi \right) \\ &= \{x^2 - n(n-1)\} \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) + 2nx \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

この式は $n=0, 1$ でも正しい. よって, $p_n(x) = x^2 - n(n-1), q_n(x) = 2nx$.

6 (1) $x^p = \{1 + (x-1)\}^p = \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} (x-1)^n. (R_N(x) = 0)$

$$(2) \left(\frac{1}{x^p} \right)^{(n)} = (-p)(-p-1) \cdots (-p-n+1) \frac{1}{x^{p+n}} = (-1)^n p(p+1) \cdots (p+n-1) \frac{1}{x^{p+n}} = (-1)^n \frac{(n+p-1)!}{(p-1)!} \frac{1}{x^{p+n}}$$

より, $\frac{1}{x^p} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \binom{n+p-1}{n} (x-1)^n + R_N(x), R_N(x) = \binom{N+p-1}{N} \frac{(-1)^N (x-1)^N}{\{1+\theta(x-1)\}^{N+p}} (0 < \theta < 1).$

7 (1) 最初に $\frac{d^n}{dx^n} f(-x) = (-1)^n f^{(n)}(-x)$ に注意する.

- $f(x)$ が奇関数のとき: $f(-x) = -f(x)$ の両辺を $2m$ 回微分して, $f^{(2m)}(-x) = -f^{(2m)}(x)$. これより $f^{(2m)}(0) = -f^{(2m)}(0)$, すなわち $f^{(2m)}(0) = 0$ が得られ, $a_{2m} = \frac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!} = 0$.
- $f(x)$ が偶関数のとき: $f(-x) = f(x)$ の両辺を $2m+1$ 回微分して, $-f^{(2m+1)}(-x) = f^{(2m+1)}(x)$. これより $-f^{(2m+1)}(0) = f^{(2m+1)}(0)$, すなわち $f^{(2m+1)}(0) = 0$ が得られ, $a_{2m+1} = \frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} = 0$.

$$(2) \textcircled{1} f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} \text{ より, } (1-x^2)f''(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = xf'(x).$$

② $(1-x^2)f''(x) = xf'(x)$ の両辺を n 回 ($n \geq 1$) 微分すると, Leibniz の公式により

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - n \cdot 2xf^{(n+1)}(x) - \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2f^{(n)}(x) = xf^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x).$$

これを整理して, $(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2f^{(n)}(x) = 0. (n=0 \text{ での成立は明らか}).$

③ $n=2m-1 (m \geq 1)$ の場合の ② の関係式に $x=0$ を代入して, $f^{(2m+1)}(0) = (2m-1)^2 f^{(2m-1)}(0)$. この関係式を繰り返して, $m \geq 1$ に対し

$$f^{(2m+1)}(0) = (2m-1)^2 f^{(2m-1)}(0) = \cdots = (2m-1)^2 \cdots 3^2 \cdot 1^2 f'(0) = \{(2m-1)!!\}^2.$$

ここで, $f'(0) = 1$ を用いた. $(-1)!! = 1$ に注意すれば, $f^{(2m+1)}(0) = \{(2m-1)!!\}^2 (m \geq 0).$

$$\textcircled{4} \quad a_{2m+1} = \frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} = \frac{\{(2m-1)!!\}^2}{(2m+1)!!(2m)!!} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{1}{2m+1} \quad (m \geq 0).$$

$$(3) \quad \textcircled{1} \quad f(x) = \tan x \text{ より, } f'(x) = 1 + \tan^2 x = 1 + f(x)^2.$$

$$\textcircled{2} \quad n \geq 1 \text{ のとき } f'(x) = 1 + f(x)^2 \text{ を } n \text{ 回微分して, } f^{(n+1)}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f^{(n-j)}(x) f^{(j)}(x). \quad n=0 \text{ のとき}$$

$$\text{は } f'(x) = 1 + f(x)^2.$$

$$\textcircled{3} \quad f^{(2k)}(0) = 0 \text{ より,}$$

$$f^{(2m+1)}(0) = \sum_{j=0}^{2m} \binom{2m}{j} f^{(2m-j)}(0) f^{(j)}(0) = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{2k+1} f^{(2m-2k-1)}(0) f^{(2k+1)}(0) \quad (m \geq 1).$$

$$\textcircled{4} \quad a_{2m+1} = \frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} = \frac{(2m)!}{(2m+1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(2m-2k-1)}(0) f^{(2k+1)}(0)}{(2m-2k-1)!(2k+1)!} = \frac{1}{2m+1} \sum_{k=0}^{m-1} a_{2m-2k-1} a_{2k+1} \quad (m \geq 1).$$

$$\textcircled{5} \quad a_1 = f'(0) = 1 \text{ と } \textcircled{4} \text{ の関係式を用いて,}$$

$$a_1 = 1, \quad a_3 = \frac{1}{3} a_1^2 = \frac{1}{3}, \quad a_5 = \frac{1}{5} (a_3 a_1 + a_1 a_3) = \frac{2}{15}, \quad a_7 = \frac{1}{7} (a_5 a_1 + a_3^2 + a_1 a_5) = \frac{17}{315}.$$

2 レポート課題

$$\textbf{【1】} \quad f(x) = e^{\log 2^{-3x}} = e^{-3x \log 2} \text{ なので, } f^{(n)}(x) = (-3 \log 2)^n e^{-3x \log 2}. \text{ よって, } f^{(n)}(0) = \boxed{(-3 \log 2)^n}.$$

$$\textbf{【2】} \quad n \geq 2 \text{ のとき, } f(x) = x^2 \log(1-x) \text{ に Leibniz の公式を適用して,}$$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} (\log(1-x))^{(n-k)}$$

$$= x^2 \cdot (\log(1-x))^{(n)} + n \cdot 2x \cdot (\log(1-x))^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot (\log(1-x))^{(n-2)}$$

$$\text{となる. } (\log(1-x))^{(m)} = -\frac{(m-1)!}{(1-x)^m} \quad (m \geq 1) \text{ なので,}$$

$$f^{(n)}(x) = x^2 \cdot \left(-\frac{(n-1)!}{(1-x)^n} \right) + 2nx \cdot \left(-\frac{(n-2)!}{(1-x)^{n-1}} \right) + n(n-1) \cdot \begin{cases} \log(1-x) & (n=2) \\ -\frac{(n-3)!}{(1-x)^{n-2}} & (n \geq 3) \end{cases}$$

となる. よって,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(1-x)^2} (-3x^2 + 4x - 2(1-x)^2 \log(1-x)) & (n=2) \\ -\frac{(n-3)!}{(1-x)^n} (2x^2 - 2nx + n(n-1)) & (n \geq 3) \end{cases}$$

$$\textbf{【3】} \quad f(x) = \sqrt[3]{1+x} \text{ とおく. このとき,}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{10}{27}(1+x)^{-\frac{8}{3}}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{80}{81}(1+x)^{-\frac{11}{3}}.$$

よって,

$$\sqrt[3]{1+x} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4$$

$$= \boxed{1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243} \frac{x^4}{(1+\theta x)^{11/3}}} \quad (0 < \theta < 1)$$

$$\textbf{【4】} \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) \text{ なので, } \cos^3 x = \cos x \cdot \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) = \frac{1}{2} \cos x \cos 2x + \frac{1}{2} \cos x \text{ となる. さらに,}$$

$$\cos x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) \text{ なので, } \cos^3 x = \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x \text{ となる. } g(t) = t^2 \cos t \text{ とおくと,}$$

$$x^2 \cos^3 x = \frac{1}{4} x^2 \cos 3x + \frac{3}{4} x^2 \cos x = \frac{1}{36} g(3x) + \frac{3}{4} g(x). \text{ よって, } f^{(n)}(x) = \frac{1}{36} \cdot 3^n g^{(n)}(3x) + \frac{3}{4} g^{(n)}(x) \text{ と}$$

$$\text{なり, } f^{(n)}(0) = \frac{3^{n-2} + 3}{4} g^{(n)}(0) \text{ となる. } \textcircled{5} \text{ の結果から, } g^{(n)}(0) = -n(n-1) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right). \text{ よって, } f^{(n)}(0) =$$

$$\boxed{-\left(\frac{3^{n-2} + 3}{4}\right) n(n-1) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)} = \begin{cases} 0 & (n \geq 1: \text{奇数}), \\ \frac{1}{4}(-1)^{\frac{n}{2}-1} (3^{n-2} + 3) n(n-1) & (n \geq 2: \text{偶数}). \end{cases}$$