

数学演習第一 (演習第 8 回)

線形：正則行列，逆行列，2 次または 3 次の行列式

2022 年 6 月 29 日

要点

- I. n 次正方行列 A に対して $AB = BA = E_n$ (E_n は n 次単位行列) を満たす行列 B が存在するとき, A を**正則行列** または A は**正則である** といい, B を A の**逆行列** という.
- II. 正則行列 A に対して, A の逆行列はただ一つに定まる. A の逆行列を A^{-1} と書く. (線形教科書 p.26)
- III. n 次正方行列 A, B が $AB = E_n$ を満たせば, A と B はともに正則で互いに逆行列. (線形教科書 p.59)
- IV. 2 次正方行列の場合は, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が正則 $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$. このとき, A の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

(演習第 2 回の要点 2, および下の 1 参照.)

- V. n 次正方行列 A に対して, $[A \ E_n]$ の (行基本変形による) 簡約行列が $[E_n \ B]$ となるならば, A は正則であり $B = A^{-1}$ である. 簡約行列の左側の行列が E_n にならないとき, A は正則でない. (線形教科書 pp.59–61)
- VI. 2 次正方行列, 3 次正方行列の行列式はそれぞれ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

となる. (線形教科書 p.66)

- VII. 平面ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の作る平行四辺形の面積は $|\mathbf{a} \ \mathbf{b}|$ (行列式) の絶対値, 空間ベクトル $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ の作る平行六面体の体積は $|\mathbf{p} \ \mathbf{q} \ \mathbf{r}|$ (行列式) の絶対値で与えられる. (線形教科書 pp.85–86)

1 演習問題

1 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ とする.

- (1) $|A|$ を求めよ.
- (2) $A\tilde{A}$ を計算せよ.
- (3) (2) の結果を用いて, $|A| \neq 0$ のとき A は正則行列であることを示し, A^{-1} を求めよ.
- (4) $|AB| = |A||B|$ を示せ. (ヒント: 両辺をそれぞれ計算する)
- (5) $|A| \neq 0$ と A が正則であることは同値であることを示せ. (ヒント: I と (4) を使う)

2 以下の行列が正則かどうか調べよ．さらに，正則であれば逆行列を求めよ．

$$(1) \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -1 & \lambda + 4 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

3 2×2 行列 A, B に対して，以下の (1) ~ (5) は成り立つか？成り立つ場合は証明し，成り立たない場合は反例（成り立たない行列の具体例）をあげよ．ただし，(1) において λ は実数，(5) において A は正則とする．

$$(1) |\lambda A| = \lambda |A| \quad (2) |AB| = |BA| \quad (3) |A + B| = |A| + |B|$$

$$(4) |{}^t A| = |A| \quad (5) |A^{-1}| = |A|^{-1}$$

4 m 次正方行列 $A, m \times n$ 行列 B に対して， $m \times (m+n)$ 行列 $[A \ B]$ に行基本変形を繰り返して $[E_m \ C]$ まで変形できれば， A は正則であり $C = A^{-1}B$ が成り立つ（各自確認すること）．この事実を用いて

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

に対して以下の問いに答えよ．

- (1) $AX = B$ を満たす 3 次正方行列 X を求めよ．
 (2) $YA = B$ を満たす 3 次正方行列 Y を求めよ．（ヒント：転置をとる）

5 以下の行列式を求めよ．ただし，(2) については因数分解された形で答えよ．

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix}$$

6 正方行列 A が ${}^t A A = E$ を満たすとき， A を直交行列という．III より直交行列は正則行列であり， $A^{-1} = {}^t A$ となることに注意せよ．

- (1) $P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ は直交行列であることを示せ．さらに， P の逆行列を求めよ．
 (2) $Q = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix}$ は直交行列であることを示せ．さらに， Q の逆行列を求めよ．
 (3) 5 (3) の行列を R とする． $r \sin \theta \neq 0$ とき， ${}^t R$ の逆行列を求めよ．（ヒント：まず R を Q とある対角行列 D の積で表す）

7 平面ベクトル $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ および空間ベクトル $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ に対して、以下の問いに答えよ.

- (1) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の作る平行四辺形の面積 S を求めよ.
- (2) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の作る三角形の面積 T を求めよ.
- (3) $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ の作る平行六面体の体積 V を求めよ.
- (4) $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ の作る四面体の体積 W を求めよ.

2 レポート問題 (WebClass へ提出)

1 a を実数とする. 行列 $A = \begin{bmatrix} a^2 & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}$ が正則となるための a の条件を求め, そのときの逆行列 A^{-1} を求めよ.

2 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ とおく.

- (1) 行列式 $|B|$ を求めよ.
- (2) B が正則であるかどうか判定し, 正則であれば逆行列 B^{-1} を求めよ.