

数学演習第一 演習第8回 【解答例】

線形：正則行列，逆行列，2次または3次の行列式 (2022年6月29日 実施)

1 演習問題

1 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ とする.

(1) $|A| = ad - bc$ (2) $A\tilde{A} = (ad - bc)E_2$

(3) $|A| = ad - bc \neq 0$ なので, $C = (ad - bc)^{-1}\tilde{A}$ とおけば, (2) より $AC = E_2$ となる. よって, III より A は正則であり $A^{-1} = C$.

(4) $|AB| = \begin{vmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{vmatrix} = (ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg)$
 $= (acef + adeh + bcfg + bdgh) - (acef + adfg + bceh + bdgh)$
 $= ad(eh - fg) + bc(fg - eh) = (ad - bc)(eh - fg) = |A||B|.$

(5) $|A| \neq 0$ ならば A は正則であることは (3) で示したので, その逆を示す. A が正則のとき I より, $AD = E_2$ となる行列 D が存在する. 両辺の行列式を取って, 左辺に対して (4) を用いれば, $|A||D| = |E_2| = 1$ となる. $|A| = 0$ とすれば $|A||D| = 1$ に矛盾するので, $|A| \neq 0$ が成り立つ.

2 (1) $\begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$ なので IV より $r \neq 0$ のとき正則.

$r \neq 0$ のとき, IV より逆行列は $\frac{1}{r} \begin{bmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{bmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -1 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda + 3)^2$ なので IV より $\lambda \neq -3$ のとき正則.

$\lambda \neq -3$ のとき, IV より逆行列は $\frac{1}{(\lambda + 3)^2} \begin{bmatrix} \lambda + 4 & -1 \\ 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を行基本変形により簡約行列に変形すると

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textcircled{3} - 2 \times \textcircled{1}]{\textcircled{2} - 3 \times \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4} \times \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textcircled{3} + 3 \times \textcircled{2}]{\textcircled{1} - 2 \times \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1/4 \end{bmatrix} \text{ となる.}$$

よって, V より正則でない.

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を行基本変形により簡約行列に変形すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textcircled{3} - 3 \times \textcircled{1}]{\textcircled{2} + 4 \times \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textcircled{2} \leftrightarrow \textcircled{3}]{-1 \times \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{3} - 2 \times \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textcircled{2} + 2 \times \textcircled{3}]{\textcircled{1} + \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ となる.}$$

よって, V より正則であり, 逆行列は $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$

(5) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を行基本変形により簡約行列に変形すると

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\textcircled{4}-\textcircled{1}, -1 \times \textcircled{2}]{\textcircled{3}-2 \times \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-1 \times \textcircled{3}]{\textcircled{4}-\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\textcircled{4}+\textcircled{3}]{\textcircled{1}-\textcircled{3}, \textcircled{2}+\textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-2 \times \textcircled{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となる．よって， V より正則であり逆行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ．

- 3 (1) $\lambda = 2$, $A = E_2$ とすれば, $|\lambda A| = 4$ だが $\lambda|A| = 2$ となる．よって, 成り立たない.
- (2) 1 (4) より $|AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|$ が成り立つ.
- (3) $A = B = E_2$ とすれば, $|A+B| = 4$, $|A| + |B| = 2$ となる．よって, 成り立たない.
- (4) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ とすると, $|{}^t A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |A|$ が成り立つ.
- (5) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ とすると, $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ であり,

$$|A^{-1}| = \begin{vmatrix} \frac{a_{22}}{|A|} & \frac{-a_{12}}{|A|} \\ \frac{-a_{21}}{|A|} & \frac{a_{11}}{|A|} \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|^2} \cdot (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}) = \frac{1}{|A|^2} \cdot |A| = |A|^{-1}$$

が成り立つ．

- 4 (1) $[A \ B]$ を行基本変形により簡約行列に変形すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\textcircled{3}+2 \times \textcircled{2}]{\textcircled{1}-2 \times \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -3 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 5 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow[-1 \times \textcircled{3}]{\textcircled{1}+\textcircled{3}, \textcircled{2}+\textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \text{ となる.}$$

よって, $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & -15 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}$.

- (2) 両辺の転置をとり, B は交代行列 (${}^t B = -B$) であることに注意すると, ${}^t A {}^t Y = -B$ となる.

(1) と同様にして, ${}^t Y = \begin{bmatrix} 7 & -5 & -11 \\ -7 & 6 & 9 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ を得る．よって, $Y = \begin{bmatrix} 7 & -7 & -3 \\ -5 & 6 & 4 \\ -11 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ となる．

$$\boxed{5} \quad (1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18. \quad (2) \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1).$$

$$(3) \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta.$$

$$\boxed{6} \quad (1) \text{ 直交行列であることは計算して } {}^t P P = E_2 \text{ を示せばよい. 逆行列は } P^{-1} = {}^t P = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

$$(2) \text{ 直交行列であることは計算して } {}^t Q Q = E_3 \text{ を示せばよい. 逆行列は}$$

$$Q^{-1} = {}^t Q = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(3) D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \sin \theta \end{bmatrix} \text{ とおくと } R = QD \text{ となり, 仮定 } r \sin \theta \neq 0 \text{ により } D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r \sin \theta} \end{bmatrix}.$$

$$\text{よって, } {}^t R = {}^t D {}^t Q = D Q^{-1} \text{ であり,}$$

$$\begin{aligned} ({}^t R)^{-1} &= Q D^{-1} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r \sin \theta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} & -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \\ \sin \theta \sin \varphi & \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \\ \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\boxed{7} \quad (1) \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -9 \text{ より, } S = |-9| = 9. \quad (2) T = \frac{S}{2} = \frac{9}{2}.$$

$$(3) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -32 \text{ より, } V = |-32| = 32. \quad (4) W = \frac{V}{6} = \frac{16}{3}.$$

2 レポート問題

$$\boxed{1} \quad \begin{vmatrix} a^2 & 1 \\ -1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 \text{ なので IV より } a \neq -1 \text{ のとき } A \text{ は正則で, 逆行列は } A^{-1} = \frac{1}{a^3 + 1} \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a^2 \end{bmatrix}.$$

$$\boxed{2} \quad (1) |B| = 1 \quad (2) [B \ E_3] \text{ を行基本変形により簡約行列に変形すると}$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}+\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} \leftrightarrow \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\textcircled{3}-2 \times \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1 \times \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textcircled{2}-\textcircled{3}]{\textcircled{1}-2 \times \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{となる. よって, } B \text{ は正則であり, } B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$