

数学演習第一 (演習 第9回)

微積：漸近展開, 積分の計算 (1)

2022 年 7 月 6 日

ランダウの記号 (微積教科書 p.49 参照)

関数 $f(x)$ が $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$ を満たすとき, $f(x) = o(x^n)$ ($x \rightarrow 0$) と表す. $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$x^m o(x^n) = o(x^{m+n}), \quad o(x^m) o(x^n) = o(x^{m+n}), \quad o(x^{m+n}) = x^m o(x^n), \\ m \leq n \text{ なら } o(x^m) + o(x^n) = o(x^m) \quad (x \rightarrow 0)$$

が成り立つ (微積教科書 p.50 定理 2.4.4 参照). 但し, ランダウの記号を含む等式は「左辺を右辺で評価する評価式」であることに注意. 例えば, $o(x^m) o(x^n) = o(x^{m+n})$ ($x \rightarrow 0$) は次を意味する:

$$f(x) = o(x^m), \quad g(x) = o(x^n) \quad (x \rightarrow 0) \quad \Rightarrow \quad f(x)g(x) = o(x^{n+m}) \quad (x \rightarrow 0).$$

漸近展開の要点

◎空欄の中に適当な数式を記入し, 今回の演習で必要となる予備知識を確認せよ.

$x = 0$ の周りで定義された関数 $f(x)$ がランダウの記号を用いて,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N + o(x^N) \quad (x \rightarrow 0)$$

の形に表されるとき, この右辺を $f(x)$ の $x \rightarrow 0$ における N 次の漸近展開という. このとき, 右辺の係数 $a_0, a_1, \dots, a_N$ は一意に定まり, $f(x)$ が C^N 級ならば $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ ($n = 0, 1, \dots, N$) で与えられる (微積教科書 定理 2.4.5). 以下に挙げる $x \rightarrow 0$ における漸近展開は最も基本的かつ重要な例である.

(a) $e^x = \sum_{n=0}^N \boxed{} x^n + o(x^N).$

(b) $\cos x = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \boxed{} x^{2n} + o(x^N), \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \boxed{} x^{2n+1} + o(x^N).$

記号 $\lfloor a \rfloor$ は a 以下の最大整数を表す (例えば, 自然数 N に対し $N_1 = \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$ は $2N_1 + 1 \leq N$ を満たす最大整数). 一般に, 偶関数なら奇数次の項が消え, 奇関数なら偶数次の項が消える.

(c) $\log(1+x) = \sum_{n=1}^N \boxed{} x^n + o(x^N).$

(d) $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^N \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^N).$ 但し, $\binom{\alpha}{0} = 1, \binom{\alpha}{n} = \boxed{} \quad (n = 1, 2, \dots).$

特に, $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^N \boxed{} x^n + o(x^N)$ (微積教科書 p.46 問題 2.3 1(3), p.151 例題 6.2.1 参照).

(a)~(d) の関数を用いて表現される関数であっても, より複雑な関数 $f(x)$ に対しては, 一般に $f^{(n)}(0)$ を直接計算するのは手が掛かる. しかし, $f^{(n)}(0)$ を直接計算しなくても, (a)~(d) の漸近展開を組み合わせることで $x \rightarrow 0$ における漸近展開が得られることがよくある (次の **例題** 参照).

例題 上記の漸近展開を利用して、 $x \rightarrow 0$ における $\frac{1}{\cos x}$, $\tan x$, $\log(\cos x)$ の 5 次の漸近展開を求めよ.

【解】 まず, (b) より $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$, $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$.

• $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 + (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5))}$ と $\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 + o(X^2)$ ($X \rightarrow 0$) から,

$$\frac{1}{\cos x} = 1 - \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) + \left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)^2 + o(x^5) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5).$$

《別法》 $\frac{1}{\cos x} = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + o(x^5)$ の形に漸近展開される (偶関数). $1 = \cos x \cdot \frac{1}{\cos x}$ より,

$$1 = \left(a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + o(x^5)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) = a_0 + \left(a_2 - \frac{a_0}{2}\right)x^2 + \left(a_4 - \frac{a_2}{2} + \frac{a_0}{24}\right)x^4 + o(x^5).$$

係数を比較して, $a_0 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{5}{24}$.

• $\tan x = \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x = \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)\right)\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

《別法》 $\tan x = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^5)$ の形に漸近展開される (奇関数). $\sin x = \tan x \cos x$ より,

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) &= \left(a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^5)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) \\ &= a_1x + \left(a_3 - \frac{a_1}{2}\right)x^3 + \left(a_5 - \frac{a_3}{2} + \frac{a_1}{24}\right)x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

係数を比較して, $a_1 = 1$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_5 = \frac{2}{15}$.

• $\log(\cos x) = \log\left(1 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right)\right)$ と $\log(1+X) = X - \frac{1}{2}X^2 + o(X^2)$ ($X \rightarrow 0$) から,

$$\log(\cos x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)^2 + o(x^5) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^5).$$

《別法》 $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$ より, $\int_0^x o(t^4) dt = o(x^5)$ に注意して,

$$\log(\cos x) = -\int_0^x \tan t dt = -\int_0^x \left(t + \frac{1}{3}t^3 + o(t^4)\right) dt = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^5).$$

1 演習問題

1 (漸近展開)

次の関数の $x \rightarrow 0$ における漸近展開を指定された次数まで求めよ. ただし, $\int_0^x o(t^n) dt = o(x^{n+1})$ ($x \rightarrow 0$) を用いてよい.

(1) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ (2 次) (2) $\sqrt{1+x}$ (2 次) (3) $\cosh x, \sinh x$ (5 次)

(4) 3^x (2 次) (5) $\log(2+x)$ (2 次) (6) $\frac{x}{2-x-x^2}$ (3 次)

(7) $\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ (5 次) (8) $\frac{1-\cos x}{x^2}$ (4 次) (9) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ (4 次)

(10) $e^{-x} \cos x$ (3 次) (11) $\frac{x}{\sin x}$ (4 次) (12) $e^{\cos x}$ (4 次)

(13) $\tan^{-1} x \left(= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \right)$ (5 次) (14) $\sin^{-1} x \left(= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right)$ (5 次)

【注意】 (10), (11), (12) 以外は N 次の漸近展開の形で求まるので, 余力のある人は挑戦してみるとよい ((1), (2), (14) では 2 重階乗を用いる). なお, 偶関数なら $2N$ 次, 奇関数なら $2N+1$ 次の漸近展開の形で考えるのが自然.

2 (漸近展開の応用)

(1) 漸近展開を利用して次の極限值を求めよ.

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right) \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

(2) $y = x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}$ の $x \rightarrow \pm\infty$ における漸近線 $y = ax + b$ を求めよ.

(ヒント: $x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} = x(1 - \frac{1}{x})^{\frac{2}{3}}$ と変形できるので, $(1+t)^{\frac{2}{3}}$ の $t \rightarrow 0$ での漸近展開を調べればよい.)

(3) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ の $n \rightarrow \infty$ における漸近展開 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ を求めよ.

(ヒント: $\frac{1}{n} = x$ とおき, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\log(1+x)}{x}} = e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}$ の $x \rightarrow 0$ での漸近展開を考えよ.)

3 (高校程度の積分計算の復習)

(1) 次の不定積分・定積分を求めよ.

$$\begin{array}{lll} (i) \int \frac{dx}{x(x+1)} & (ii) \int x \log x \, dx & (iii) \int x^3 e^{-x^2} \, dx \\ (iv) \int \frac{dx}{\sin x} & (v) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx & (vi) \int_0^{\pi} e^{-x} \cos x \, dx \\ (vii) \int_0^{\pi} |\sin x + \sqrt{3} \cos x| \, dx & (viii) \int_0^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx \quad (m, n \text{ は自然数}) \end{array}$$

(2) $\mathbb{R}$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して, 次の問いに答えよ.

(i) 関数 $G(x) = \int_0^x (x-t)f(t) \, dt$ の第2次導関数 $G''(x)$ を求めよ.

(ii) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_{\sqrt{x}}^{x^2} f(t) \, dt$ を求めよ.

2 レポート問題 (WebClass へ提出)

答だけでなく考え方 (計算過程) も書くこと.

[1] 次の関数 $f(x)$ の $x \rightarrow 0$ における漸近展開を3次の項まで求めよ. すなわち, $f(x)$ を

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0)$$

の形に漸近展開せよ.

$$(i) f(x) = \frac{\cos x}{1+x}$$

(ii) $f(x) = \log(1+e^x)$ (ヒント: $\log(1+e^x) = \log(2+X) = \log 2 + \log(1+\frac{X}{2})$, $X = x + \frac{x^2}{2} + \dots$)

[2] 漸近展開を利用して極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x \sin x + \log(1-2x)}{x(1-\cos x)}$ を求めよ.

[3] 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x \, dx$ を求めよ. (ヒント: [方法1] 積和の公式, [方法2] 倍角・3倍角の公式)