数学演習第一（演習第９回）【解答例】

微積： 漸近展開, 積分の計算 (1)　　2022 年 7 月 6 日

要点（漸近展開の要点）

空欄の中身は並んでいる順に

$$\boxed{\frac{1}{n!}},\quad \boxed{\frac{(-1)^n}{(2n)!}},\quad \boxed{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}},\quad \boxed{\frac{(-1)^{n-1}}{n}},\quad \boxed{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}},\quad \boxed{(-1)^n}.$$

1　演習問題

1 (本問でランダウの記号 $o(x^n)$ を使うときはいつも，$x \to 0$ が省略されている.)

(1) (d) $(\alpha = -\frac{1}{2})$ を用いて，$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2 + o(x^2) = \boxed{1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)}$.

(2) (d) $(\alpha = \frac{1}{2})$ を用いて，$\displaystyle\sqrt{1+x} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + o(x^2) = \boxed{1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)}$.

(3) (a) より $\displaystyle e^{\pm x} = 1 \pm x + \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \pm \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$ (複号同順) であるから，

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \boxed{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)},\quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \boxed{x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}.$$

(4) (a) を用いて，$\displaystyle 3^x = (e^{\log 3})^x = e^{(\log 3)x} = \boxed{1 + (\log 3)x + \frac{(\log 3)^2}{2}x^2 + o(x^2)}$.

(5) (c) より, $\displaystyle\log(2+x) = \log 2 + \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \log 2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2) = \boxed{\log 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)}$.

(6) 部分分数分解した後に (d) $(\alpha = -1)$ を用いて，

$$\begin{aligned}\frac{x}{2-x-x^2} &= \frac{x}{(1-x)(2+x)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{2+x}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+\frac{x}{2}}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left\{\left(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\right) - \left(1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^3 + o(x^3)\right)\right\} = \boxed{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x^3 + o(x^3)}.\end{aligned}$$

《別法》
$$\begin{aligned}\frac{x}{2-x-x^2} &= \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{x}{2}\left(1 + x + x^2 + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)\right)\\ &= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{3x^3}{8} + o(x^3).\end{aligned}$$

(7) (c) より，$\displaystyle\log(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} + o(x^5)$ (複号同順) であるから，

$$\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\{\log(1+x) - \log(1-x)\} = \boxed{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)}.$$

(8) (b) より, $\displaystyle\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$. よって，$\displaystyle\frac{1-\cos x}{x^2} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + \frac{x^4}{720} + o(x^4)}$.

(9) 半角の公式と (8) の結果を用いて，

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{\sin^2 x}{x^2} = 2\cdot\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2} = 2\left\{\frac{1}{2} - \frac{(2x)^2}{24} + \frac{(2x)^4}{720} + o(x^4)\right\} = \boxed{1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{45} + o(x^4)}.$$

《別法》 $\displaystyle\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{45} + o(x^4)$.

(10) (a), (b) を用いて，$\displaystyle e^{-x}\cos x = \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = \boxed{1 - x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}$.

(11) (b) より $\displaystyle\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1 + (-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4))}$. ここで，$\displaystyle\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 + o(X^2)$ $(X \to 0)$ を用いて，

$$\frac{x}{\sin x} = 1 - \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4)\right) + \left(-\frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right)^2 = \boxed{1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + o(x^4)}.$$

(12) $\cos x = 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$ $(x \to 0)$, $e^{1+X} = e \cdot e^X = e\left(1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)\right)$ $(X \to 0)$ より,

$$\begin{aligned} e^{\cos x} &= e\left\{1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o(x^4)\right\} \\ &= e\left\{1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\right\} + o(x^4) = \boxed{e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4)}. \end{aligned}$$

(13) $\mathrm{Tan}^{-1}\, x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 + o(t^4)\right) dt = \boxed{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)}$.

(14) (1) の結果を用いて, $\mathrm{Sin}^{-1}\, x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \left(1 - \frac{-t^2}{2} + \frac{3(-t^2)^2}{8} + o(t^4)\right) dt = \boxed{x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)}$.

2 (1) (i) $x \to 0$ のとき, $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2 \sin^2 x}$ において, 分母は $x^2\sin^2 x = x^2(x+o(x))^2 = x^4 + o(x^4)$ となるから, 分子 $\sin^2 x - x^2\cos^2 x$ に対する 4 次の漸近展開を計算すればよい:

$$\begin{aligned} \sin^2 x - x^2\cos^2 x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 - x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 \\ &= \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - x^2(1 - x^2 + o(x^2)) = \frac{2}{3}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

ここで, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ と $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, あるいは $\sin^2 x - x^2\cos^2 x = (\sin x + x\cos x)(\sin x - x\cos x)$ を用いても上と同じ漸近展開が得られる. よって,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3} + o(1)}{1 + o(1)} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

(ii) 対数をとって考える. $\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{\log\frac{\sin x}{x}}{x^2}$ において, 分母が x^2 だから, 分子を $o(x^2)$ を用いて表す:

$$\log\frac{\sin x}{x} = \log\frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} = \log\left(1 + \left(-\frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)\right) = \left(-\frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) + o(x^2) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

よって, $\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{6} + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{6}$ となり, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \boxed{e^{-1/6}}$.

(2) $x \neq 0$ のとき $x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} = x\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$ と変形できる. ここで, $t = -\frac{1}{x}$ と考え, $t \to 0$ において $(1+t)^{\frac{2}{3}}$ を漸近展開すると, (d) $(\alpha = \frac{2}{3})$ より, $(1+t)^{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{3}t + \frac{1}{2}\frac{2}{3}(-\frac{1}{3})t^2 + o(t^2) = 1 + \frac{2}{3}t - \frac{1}{9}t^2 + o(t^2)$. よって,

$$x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} = x\left\{1 + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\} = x - \frac{2}{3} - \frac{1}{9x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to \pm\infty).$$

これより, $y = x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}$ の $x \to \pm\infty$ での漸近線は $\boxed{y = x - \frac{2}{3}}$ であることが分かる.

(3) $\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{\log(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$ であるから, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\log(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = e \cdot e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = e\left\{1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)\right\} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2)$. 故に, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \boxed{e - \frac{e}{2n} + \frac{11e}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$ $(n \to \infty)$. [補足] 同様にして, $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e + \frac{e}{2n} + \frac{11e}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ $(n \to \infty)$.

3 (1) (前半の不定積分に対する積分定数は省略する.)

(i) 被積分関数を部分分数分解して,

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dt = \log|x| - \log|x+1| = \boxed{\log\left|\frac{x}{x+1}\right|}.$$

(ii) 部分積分法により,

$$\int x\log x\, dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\, dx = \frac{x^2\log x}{2} - \int \frac{x}{2}\, dx = \frac{x^2\log x}{2} - \frac{x^2}{4} = \boxed{\frac{1}{4}x^2(2\log x - 1)}.$$

(iii) $x^2 = t$ とおけば $x\,dx = \frac{dt}{2}$ であるから,

$$\int x^3 e^{-x^2}\, dx = \int te^{-t}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\left(-te^{-t} + \int e^{-t}\, dt\right) = -\frac{1}{2}(t+1)e^{-t} = \boxed{-\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}}.$$

(iv) $\cos x = t$ とおけば $-\sin x\,dx = dt$ であるから,

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx = \int \frac{-dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-t}{1+t}\right| = \boxed{\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\ \left(= \frac{1}{2}\log\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \boxed{\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|}\right).$$

(v) 部分積分法により,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx = \Big[-x^2\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = 2\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx = \boxed{\pi-2}.$$

(vi) 部分積分法により, $I := \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx = \Big[e^{-x}\sin x\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx = \Big[-e^{-x}\cos x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx = 1+e^{-\pi}-I.$ よって, $I = \boxed{\dfrac{1+e^{-\pi}}{2}}$.

(vii) $$\int_0^{\pi}|\sin x+\sqrt{3}\cos x|\,dx = \int_0^{\pi}\left|2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|dx = 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}|\sin x|\,dx$$

$$= 2\left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin x\,dx + \int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}}(-\sin x)\,dx\right) = 2\left(\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} + \Big[\cos x\Big]_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}}\right)$$

$$= 2\left\{\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+1\right)\right\} = \boxed{4}.$$

《別法》 $|\sin x|$ は周期 π の関数であるから, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}|\sin x|\,dx = \int_0^{\pi}|\sin x|\,dx = \int_0^{\pi}\sin x\,dx = 2.$

(viii) $I_{m,n} = \displaystyle\int_0^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx$ とおく (m, n は自然数). $m \neq n$ のとき, 三角関数の積和の公式により,

$$I_{m,n} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^{\pi} = \boxed{0}.$$

$m = n$ のときは, $I_{n,n} = \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos 2nx+1)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2nx}{2n}+x\right]_0^{\pi} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

(2) (i) 連続関数 $h(x)$, 定数 c に対し, $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_c^x h(t)\,dt = h(x)$ (微積分の基本定理) が成り立つことに注意する.

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x tf(t)\,dt\right) = \int_0^x f(t)\,dt + x\cdot f(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)\,dt,\quad F''(x) = \boxed{f(x)}.$$

(ii) $G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ とおけば, $\displaystyle\frac{1}{x-1}\int_{\sqrt{x}}^{x^2} f(t)\,dt = \frac{G(x^2)-G(\sqrt{x})}{x-1}$ ($x \to 0$ のとき $\frac{0}{0}$ 型の不定形) であるから, ロピタルの定理 (あるいは微分の定義) により,

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{\sqrt{x}}^{x^2} f(t)\,dt = \lim_{x\to1}\frac{G(x^2)-G(\sqrt{x})}{x-1} = \lim_{x\to1}\left\{2xG'(x^2)-\frac{G'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\right\} = \boxed{\frac{3}{2}f(1)}.$$

2　レポート問題

[1]　(i)　$\dfrac{\cos x}{1+x} = \left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right)(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^2)) = \boxed{1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{2} + o(x^3)}\quad (x \to 0).$

(ii)　$1 + e^x = 2 + \left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\ (x \to 0),$

$\log(2+X) = \log 2 + \log\left(1 + \dfrac{X}{2}\right) = \log 2 + \dfrac{X}{2} - \dfrac{X^2}{8} + \dfrac{X^3}{24} + o(X^3)\ (X \to 0)$ より,

$$\begin{aligned}\log(1+e^x) &= \log 2 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{8}\left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + \frac{1}{24}(x + o(x))^3 + o(x^3)\\ &= \boxed{\log 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^3)}\quad (x \to 0).\end{aligned}$$

[2]　分母は $x(1-\cos x) = \dfrac{1}{2}x^3 + o(x^3)$ となるから, 分子に対する 3 次の漸近展開を計算すればよい:

$$\begin{aligned}2e^x \sin x + \log(1-2x) &= 2\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \left\{(-2x) - \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3} + o(x^3)\right\}\\ &= 2\left(x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + \left(-2x - 2x^2 - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\right) = -2x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

よって,

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x \sin x + \log(1-2x)}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-2x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3))} = \lim_{x\to 0}\frac{-2 + o(1)}{\frac{1}{2} + o(1)} = \boxed{-4}.$$

[3]　[方法 1]　積和の公式を用いて,

$$\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{2}(-\cos 3x + \cos x)\sin 3x = \frac{1}{4}(-\sin 6x + \sin 4x + \sin 2x).$$

よって,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x\, dx = \frac{1}{4}\left[\frac{\cos 6x}{6} - \frac{\cos 4x}{4} - \frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{1}{6}}.$$

[方法 2]　倍角の公式, 3 倍角の公式を用いて,

$$\sin x \sin 2x \sin 3x = \sin x \cdot 2\sin x \cos x \cdot (3\sin x - 4\sin^3 x) = 2(3\sin^3 x - 4\sin^5 x)\cos x.$$

よって, $\sin x = u$ とおいて,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x\, dx = \int_0^1 2(3u^3 - 4u^5)\, du = 2\left[\frac{3u^4}{4} - \frac{2u^6}{3}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{6}}.$$