

数学演習第一（演習第 10 回）【解答例】

線形：4 次以上の行列式 2022 年 7 月 13 日

1 演習問題

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 20 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 96.$$

$$(2) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 12 & 13 & 1 & 5 \\ 11 & 16 & -1 & 6 \\ 10 & 9 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 11 & 11 & 0 & 1 \\ 12 & 18 & 0 & 10 \\ 11 & 11 & 0 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 11 & 1 \\ 12 & 18 & 10 \\ 11 & 11 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 11 & 11 & 1 \\ 12 & 18 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 11 & 11 \\ 12 & 18 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 11 & 0 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = 660.$$

$$(3) \quad \begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 & 1 \\ 7 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 32 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 32 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -128.$$

$$(4) \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -5 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -5 & 6 \\ 4 & -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -5 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \\ -5 & 11 & -9 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ -5 & 11 & -9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ -5 & 11 & -4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 21 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -42.$$

- $\boxed{2}$ (1) $|dE| = d^n|E| = d^n$.
 (2) 恒等式 $A\tilde{A} = |A|E$ の両辺の行列式をとって $|A\tilde{A}| = ||A|E|$. これより, $|A||\tilde{A}| = |A|^n$. 両辺を 0 でない “多項式” $|A|$ で割り算して, $|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$. ($A = [a_{ij}]$ とすると, $\tilde{A}$ の各成分は n^2 個の変数 a_{ij} の多項式で, $|A|, |\tilde{A}|$ とともに, n^2 個の変数 a_{ij} の多項式である. よって, 上記のように, $|\tilde{A}|$ と $|A|^{n-1}$ は, まず n^2 個の変数 a_{ij} の多項式として等しいことがわかり, 従って, n^2 個の変数 a_{ij} にどんな値をいれても等しいことがわかる.)

【別法】 A が正則なら, $|A||\tilde{A}| = |A|^n$ を $|A| \neq 0$ で割って, $|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$. A が正則でないとき, $\tilde{A}$ が正則と仮定すれば, $A\tilde{A} = |A|E = 0$ より $A = O$. このとき, 定義より $\tilde{A} = O$ となり, $\tilde{A}$ の仮定に反する. よって, $|A| = 0 \Rightarrow |\tilde{A}| = 0$ となるので, この場合も含めて, $|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$ が成立する.

$$\boxed{3} \quad (1) \quad \begin{vmatrix} b \\ c \\ d \\ a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c \\ b \\ d \\ a \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} d \\ b \\ c \\ a \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix} = -2.$$

$$(2) \begin{vmatrix} b \\ -3a \\ 2c \\ d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3a \\ b \\ 2c \\ d \end{vmatrix} = -(-3) \cdot 2 \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix} = 12.$$

$$(3) \begin{vmatrix} 10a \\ a+b \\ a-b \\ c+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10a \\ a+b \\ 2a \\ c+d \end{vmatrix} = 10 \cdot 2 \begin{vmatrix} a \\ a+b \\ a \\ c+d \end{vmatrix} = 0.$$

$$(4) \begin{vmatrix} 2a \\ -3b \\ -5a+4c \\ 7b-d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a \\ -3b \\ 4c \\ 7b-d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a \\ -3b \\ 4c \\ -d \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot (-1) \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix} = 48.$$

4

関係式 $wa + xb + yc + zd = te$ は w, x, y, z を変数とする連立 1 次方程式 $\begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = te$ と見なせるので、クラメル公式より、

$$w = \frac{|te \ b \ c \ d|}{|a \ b \ c \ d|} = \frac{t|e \ b \ c \ d|}{|a \ b \ c \ d|} = \frac{9t}{3} = 3t,$$

$$x = \frac{|a \ te \ c \ d|}{|a \ b \ c \ d|} = \frac{3t}{3} = t, \quad y = \frac{|a \ b \ te \ d|}{|a \ b \ c \ d|} = \frac{-6t}{3} = -2t, \quad z = \frac{|a \ b \ c \ te|}{|a \ b \ c \ d|} = \frac{6t}{3} = 2t.$$

5

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_2x_1 & x_3^2 - x_3x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_2^2 - x_2x_1 & x_3^2 - x_3x_1 \end{vmatrix} = (x_3 - x_1)(x_2 - x_1) \\ x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1).$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_2x_1 & x_3^2 - x_3x_1 & x_4^2 - x_4x_1 \\ 0 & x_2^3 - x_2^2x_1 & x_3^3 - x_3^2x_1 & x_4^3 - x_4^2x_1 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ x_2^2 - x_2x_1 & x_3^2 - x_3x_1 & x_4^2 - x_4x_1 \\ x_2^3 - x_2^2x_1 & x_3^3 - x_3^2x_1 & x_4^3 - x_4^2x_1 \end{vmatrix} = (x_4 - x_1)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$$

$$(1) \text{ の結果より, } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix} = (x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_3 - x_2) \text{ なので,}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1).$$

6

$$(1) |P_2| = \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{vmatrix} = 1 \text{ である. } n \geq 2 \text{ なる自然数に対し, } \begin{vmatrix} P_n' \\ \mathbf{p}_n \end{vmatrix} = |P_n| = 1 \text{ と仮定すると,}$$

$$|P_{n+1}| = \begin{vmatrix} E_{n-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cos \theta_n & -\sin \theta_n \\ \mathbf{0} & \sin \theta_n & \cos \theta_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_n' & \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_n & 0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta_n & -\sin \theta_n \\ \sin \theta_n & \cos \theta_n \end{vmatrix} |P_n| = 1 \cdot 1 = 1$$

となる. 故に、数学的帰納法により $n \geq 2$ なる自然数に対し $|P_n| = 1$ である. 特に $|P_4| = 1$.

$$\text{【補足】} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta_1 \\ r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \vdots \\ r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2} \\ r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\ r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{を } n \text{ 次元での極座標変換とし, } n \geq 2$$

に対し, $\tilde{x}_{n-1} = r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2}$ とするとき, $x_{n-1} = \tilde{x}_{n-1} \cos \theta_{n-1}$, $x_n = \tilde{x}_{n-1} \sin \theta_{n-1}$ だから,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_{n-2} \\ dx_{n-1} \\ dx_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_{n-2} \\ \cos \theta_{n-1} d\tilde{x}_{n-1} - \tilde{x}_{n-1} \sin \theta_{n-1} d\theta_{n-1} \\ \sin \theta_{n-1} d\tilde{x}_{n-1} + \tilde{x}_{n-1} \cos \theta_{n-1} d\theta_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E_{n-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cos \theta_{n-1} & -\sin \theta_{n-1} \\ \mathbf{0} & \sin \theta_{n-1} & \cos \theta_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_{n-2} \\ d\tilde{x}_{n-1} \\ \tilde{x}_{n-1} d\theta_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= P_n \begin{bmatrix} dr \\ r d\theta_1 \\ \vdots \\ r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-3} d\theta_{n-2} \\ r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-3} \sin \theta_{n-2} d\theta_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

という形で P_n は現れる. (dx_i や dr , $d\theta_i$ などは後期の微分積分学第二で学ぶ (全) 微分である.) 最後の等号は帰納的にわかるものであり, $\tilde{x}_1 = r$ に注意する.)

- (2) 求める行列式は x の多項式となるので $f_n(x)$ とおく. 第 1 行に関して余因子展開し, $f_n(x) = (x^2 + 1)f_{n-1}(x) - x^2 f_{n-2}(x)$ を得る. $f_1(x) = x^2 + 1$, $f_2(x) = (x^2 + 1)^2 - x^2 = x^4 + x^2 + 1$ より, $f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^{2k}$ であると予想される. これを数学的帰納法により示そう. $n \leq 2$ のとき, 確かに成り立つ. $n \geq 3$ のとき, $f_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k}$, $f_{n-2}(x) = \sum_{k=0}^{n-2} x^{2k}$ であるとすれば (帰納法の仮定),

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (x^2 + 1)f_{n-1}(x) - x^2 f_{n-2}(x) = (x^2 + 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k} - x^2 \sum_{k=0}^{n-2} x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k} + x^2 \cdot \sum_{k=0}^{n-2} x^{2k} = \sum_{k=0}^n x^{2k} \end{aligned}$$

より n のときも確かに成り立つ. 故に, $f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^{2k} = x^{2n} + x^{2(n-1)} + \cdots + x^2 + 1$.

2 レポート課題 (WebClass 提出用)

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & -4 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & -27 & -4 & -7 \\ 0 & -25 & -4 & -6 \\ 0 & -21 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 27 & 1 & 7 \\ 25 & 1 & 6 \\ 21 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 27 & 7 \\ 1 & 25 & 6 \\ 1 & 21 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$-4 \begin{vmatrix} 1 & 27 & 7 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & -4 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = \boxed{-8}.$$

$$(2) \boxed{2} \text{ (2) より, } |\tilde{A}| = |A|^{4-1} = (-8)^3 = \boxed{-512}.$$

$$(3) \boxed{5} \text{ (2) より, } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \end{vmatrix} = (5-4)(5-3)(5-2)(4-3)(4-2)(3-2) = \boxed{12}.$$

$$(4) |B_{11}| = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -35, \quad |B_{21}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -5, \quad |B_{31}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10,$$

$$|B_{12}| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2, \quad |B_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -10, \quad |B_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7,$$

$$|B_{13}| = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 28, \quad |B_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -5, \quad |B_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$\text{なので, } \tilde{B} = \begin{bmatrix} -35 & 5 & 10 \\ -2 & -10 & 7 \\ 28 & 5 & -8 \end{bmatrix}. \quad |B| = 45 \text{ であり, } B^{-1} = \frac{1}{|B|} \tilde{B} = \frac{1}{45} \begin{bmatrix} -35 & 5 & 10 \\ -2 & -10 & 7 \\ 28 & 5 & -8 \end{bmatrix}.$$