

数学演習第一・中間統一試験【解説】

2022 年 6 月 15 日実施 ・ 試験時間 90 分

1 逆三角関数について、次の問いに答えよ。

(1) $\text{Cos}^{-1}\left(\cos \frac{8\pi}{7}\right)$ の値を求めよ。

【答】 $\cos \frac{8\pi}{7} = \cos\left(2\pi - \frac{8\pi}{7}\right) = \cos \frac{6\pi}{7}$ より, $\text{Cos}^{-1}\left(\cos \frac{8\pi}{7}\right) = \boxed{\frac{6\pi}{7}}$.

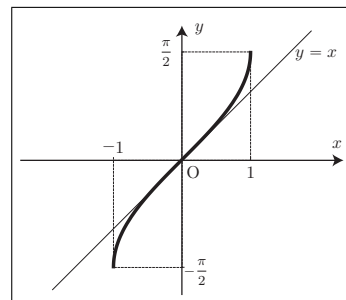
(2) 方程式 $\text{Tan}^{-1} x + 2 \text{Tan}^{-1} 2 = \pi$ を解け。

【答】 $\alpha = \text{Tan}^{-1} 2$ とおけば、与えられた方程式は $\text{Tan}^{-1} x = \pi - 2\alpha$ と書ける。また、 α の定義により、 $\tan \alpha = 2$ かつ $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ であるが、 $\tan \alpha > \sqrt{3}$ より、 α は $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ の範囲にある。このとき、 $\text{Tan}^{-1} x = \pi - 2\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ となり、確かに解 $x \in \mathbb{R}$ が存在する。その値は

$$x = \tan(\pi - 2\alpha) = \tan(-2\alpha) = -\tan 2\alpha = -\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = -\frac{4}{1 - 4} = \boxed{\frac{4}{3}}.$$

(3) 関数 $y = \text{Sin}^{-1} x$ のグラフの概形を ($y = x$ のグラフとの位置関係に注意して) 解答欄に描け。ただし、定義域と値域が読み取れるように座標軸に必要な数値を書き入れよ。

【答】 $y = \text{Sin}^{-1} x$ のグラフは $y = \sin x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) のグラフを直線 $y = x$ に関して対称移動して得られる。よって、 $y = \text{Sin}^{-1} x$ の定義域は $-1 \leq x \leq 1$ 、値域は $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ 。また、 $y = \text{Sin}^{-1} x$ のグラフは原点において直線 $y = x$ と接し、点 $(\pm 1, \pm \frac{\pi}{2})$ において直線 $x = \pm 1$ に接する (複号同順)。



2 次の極限値を求めよ。ただし、(5) において $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ である。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$

【答】 $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \frac{n+1}{n-1} \cdot \left\{\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right\}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \boxed{e^2}$.

[別法] $x = \frac{1}{n}$ とおけば、 $\log\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = n \log \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{x} \log \frac{1+x}{1-x} = \frac{\log(1+x)}{x} + \frac{\log(1-x)}{-x} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \rightarrow 0} 2$.

よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = e^2$.

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sinh x)^{\frac{1}{x}}$

【答】 まず、対数をとった極限を考える。 $x \rightarrow \infty$ のとき、 $\log(\sinh x)^{\frac{1}{x}} = \frac{\log(\sinh x)}{x}$ は $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形ゆえ、ロピタルの定理を用いて (ロピタルの定理を用いた箇所を $\star$ で表した)、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log(\sinh x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(\sinh x)}{x} \stackrel{\star}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\cosh x}{\sinh x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\tanh x} = 1.$$

よって、 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sinh x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\log(\sinh x)^{\frac{1}{x}}} = \boxed{e}$.

[別法] $\log(\sinh x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{x} \log \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{2} = \frac{x + \log \frac{1 - e^{-2x}}{2}}{x} = 1 + \frac{\log \frac{1 - e^{-2x}}{2}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$
 より、 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sinh x)^{\frac{1}{x}} = e$.

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^{-1} x + x - \frac{\pi}{2}}{\tan^{-1} x - x}$$

【答】 $x \rightarrow 0$ のとき $\frac{0}{0}$ の不定形となる。ロピタルの定理を 2 回用いて、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^{-1} x + x - \frac{\pi}{2}}{\tan^{-1} x - x} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + 1}{(1+x^2)^{-1} - 1} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{-2x(1+x^2)^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{2(1+x^2)^{-2}} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

[注] $\cos^{-1} x - \frac{\pi}{2} = -\sin^{-1} x$ が成り立つ。とはいえ、この形で表現しても計算はほとんど変わらない。

3 関数の微分係数について、次の問いに答えよ。

(7) 関数 $f(x) = (\log x)^{\log x}$ に対して、 $f'(e)$ を求めよ。

【答】 $f(x)$ は $x > 1$ において定義される (但し $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1$)。 $\log f(x) = (\log x) \log(\log x)$ の両辺を x で微分して、

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} \cdot \log(\log x) + \log x \cdot \frac{1}{x \log x} = \frac{\log(\log x) + 1}{x}.$$

$$f(e) = 1 \text{ より, } f'(e) = \frac{\log 1 + 1}{e} = \boxed{\frac{1}{e}}.$$

(8) 関数 $g(x) = \sin^{-1} \sqrt{1-x}$ に対して、 $g'\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めよ。

【答】 $g(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ で定義され、 $0 < x < 1$ で微分可能となる。

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}.$$

$$\text{よって, } g'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = \boxed{-1}.$$

(9) 関数 $y = \frac{1}{\sinh x}$ ($x > 0$) の逆関数 $x = \varphi(y)$ に対して、 $\varphi'(2)$ を求めよ。

【答】 $y = \frac{1}{\sinh x}$ ($x > 0$) より、 $\sinh x = \frac{1}{y} > 0$, $\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x} = \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} = \frac{\sqrt{y^2 + 1}}{y}$. これを用いて、

$$\varphi'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{-\frac{\cosh x}{\sinh^2 x}} = -\frac{\sinh^2 x}{\cosh x} = -\frac{1}{y^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}} = -\frac{1}{y\sqrt{y^2 + 1}}.$$

$$\text{よって, } \varphi'(2) = \boxed{-\frac{1}{2\sqrt{5}}}.$$

[別法] $y = \sinh x$ の逆関数は $x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$ と書ける。これを既知とすれば、

$$y = \frac{1}{\sinh x} \ (x > 0) \Leftrightarrow \sinh x = \frac{1}{y} \ (y > 0)$$

を x について解き、

$$x = \varphi(y) = \log\left(\frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2} + 1}\right) = \log \frac{\sqrt{y^2 + 1} + 1}{y} = \log(\sqrt{y^2 + 1} + 1) - \log y \ (y > 0).$$

これより、

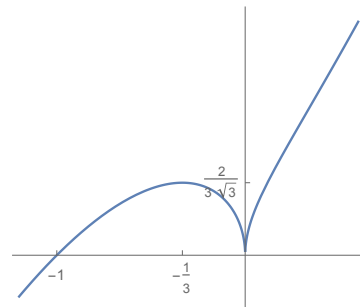
$$\varphi'(y) = \frac{\frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}}}{\sqrt{y^2 + 1} + 1} - \frac{1}{y} = \frac{\sqrt{y^2 + 1} - 1}{(y^2 + 1) - 1} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}} - \frac{1}{y} = \frac{1}{y\sqrt{y^2 + 1}}. \quad \therefore \varphi'(2) = -\frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

- 4 (10) 関数 $h(x) = (x+1)\sqrt{|x|}$ のすべての極値を求めよ. ただし, 各極値 b に対し「 $x = a$ で極大値 (or 極小値) b 」という形で答えよ.

【答】 $x < 0$ のとき, $h(x) = (x+1)\sqrt{-x}$ より, $h'(x) = \sqrt{-x} - \frac{x+1}{2\sqrt{-x}} = -\frac{3x+1}{2\sqrt{-x}}$. また, $x > 0$ のとき, $h(x) = (x+1)\sqrt{x}$ より, $h'(x) = \sqrt{x} + \frac{x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+1}{2\sqrt{x}}$. よって, $h(x)$ の増減は次の通り.

x	$\dots$	$-\frac{1}{3}$	$\dots$	0	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

従って, $h(x)$ は $x = -\frac{1}{3}$ で極大値 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $x = 0$ で極小値 0 をとる.



- 5 座標空間の 3 点 $A(-1, 1, 0)$, $B(1, 2, 3)$, $C(2, 1, 2)$ について, 次の問いに答えよ.

- (11) 3 点 A, B, C を通る平面の方程式を $ax + by + cz + d = 0$ の形で表せ.

【答】 平面 ABC は点 A を通り, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ を法線ベクトルとする. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ であるから, 方程式は $2(x+1) + 5(y-1) - 3z = 0$ で与えられる. これを整理して $2x + 5y - 3z - 3 = 0$.

- (12) 原点 O と 3 点 A, B, C を頂点とする 4 面体の体積を求めよ.

【答】 (4 面体 $OABC$ の体積) $= \frac{1}{6} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO})$ の作る平行 6 面体の体積
 $= \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AO}| = \frac{1}{6} \left| \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right| = \frac{|-3|}{6} = \frac{1}{2}.$

[別法] (3 角形 ABC の面積) $= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ の作る平行 4 辺形の面積 $= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{\sqrt{38}}{2},$

(点 O と平面 ABC の距離) $= \frac{3}{\sqrt{38}}$ より, (4 面体 $OABC$ の体積) $= \frac{1}{3} \frac{\sqrt{38}}{2} \frac{3}{\sqrt{38}} = \frac{1}{2}.$
 O から平面 ABC に下ろした垂線の長さ

ここで, 点 O から平面 ABC に下ろした垂線の足は平面 $2x + 5y - 3z = 3$ と直線 $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{-3}$ の交点 $(\frac{6}{38}, \frac{15}{38}, -\frac{9}{38})$ であるから, 垂線の長さは $\frac{3}{38} \sqrt{2^2 + 5^2 + (-3)^2} = \frac{3}{\sqrt{38}}$ と計算できる. もし, 公式

$$(\text{点 } (x_0, y_0, z_0) \text{ と平面 } ax + by + cz + d = 0 \text{ の距離}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

を知っていれば, これを用いるのが最も簡単.

- 6 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ と A の転置行列 tA について, 次の問いに答えよ.

- (13) A の左側から適当な基本行列をいくつか掛けていくと A の簡約行列 B が得られる. これらの基本行列の積として得られる行列 P (すなわち $PA = B$ を満たす行列 P) を求めよ.

【答】 A を行基本変形により簡約行列 B まで変形すると,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\textcircled{2}-2\times\textcircled{1} \\ P_{21}(-2)}]{\textcircled{2}\times\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\textcircled{2}\times\frac{1}{3} \\ P_2(\frac{1}{3})}]{\textcircled{1}+\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\textcircled{1}+\textcircled{2} \\ P_{12}(1)}]{\textcircled{1}+\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = B.$$

ここで, 矢印の上は行基本変形を表し, 下はそれに対応する基本行列の右側からの掛け算を表している. よつ

て、 $PA = B$ となる行列 P は

$$P = P_{12}(1)P_2(\frac{1}{3})P_{21}(-2) = P_{12}(1)P_2(\frac{1}{3})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = P_{12}(1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

[別法] $[A \ E]$ を行基本変形により簡約化するとき、右側に現れる行列が P に他ならない。

$$\begin{aligned} [A \ E] &= \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{2}-2\times\textcircled{1}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -6 & -2 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\frac{1}{3}\times\textcircled{2}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{1}+\textcircled{2}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right] = [B \ P]. \end{aligned}$$

(14) tAA の第 2 行を答えよ。

$$\text{【答】 } {}^tAA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \\ 3 & -3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \text{ の第 2 行は } \boxed{[1 \ 2 \ -1 \ -3]}.$$

(15) tAA の階数を求めよ。

【答】 行基本変形により、

$${}^tAA = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \\ 3 & -3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1}\leftrightarrow\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \\ 3 & -3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{2}-5\times\textcircled{1} \\ \textcircled{3}-4\times\textcircled{1} \\ \textcircled{4}-3\times\textcircled{1} \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -9 & 9 & 18 \\ 0 & -9 & 9 & 18 \\ 0 & -9 & 9 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{3}-\textcircled{2} \\ \textcircled{4}-\textcircled{2} \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -9 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

これより、 $\text{rank}({}^tAA) = \boxed{2}$ 。

[注] 簡約行列まで変形しなくても、上の形 (= 広い意味での階段行列) まで変形すれば階数は分かる。

$$\begin{aligned} \text{【別法】 まず, } {}^tA &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{2}+\textcircled{1} \\ \textcircled{3}-2\times\textcircled{1} \\ \textcircled{4}-3\times\textcircled{1} \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & -3 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ これと全く同じ行基本変形により,} \\ {}^tAA &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ 上 2 つの行は “平行でない” ので } \text{rank}({}^tAA) = 2. \end{aligned}$$

- 7** 連立 1 次方程式に関する以下の問いに答えよ。ただし、(16), (18), (20) において解が任意定数を含む場合は、任意定数の選び方は標準的な方法、すなわち線形代数の教科書に書かれている方法 (= 演習の解答例の方法) に従え。また、任意定数の文字は $s, t, \dots$ をこの順に用いよ。

(16) a が定数のとき、 2×2 行列の逆行列の公式を利用して、 $\begin{cases} ax + (a-1)y = -1 \\ (a+2)x + (a+1)y = 3 \end{cases}$ を解け。

【答】 行列表示すれば、 $\begin{bmatrix} a & a-1 \\ a+2 & a+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 。ここで、 $a(a+1) - (a-1)(a+2) = 2 \neq 0$ であるから係数行列は逆行列をもつ。よって、逆行列の公式を利用して、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a-1 \\ a+2 & a+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a+1 & -a+1 \\ -a-2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4a+2 \\ 4a+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2a \\ 1+2a \end{bmatrix}.$$

$$(17) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases} \text{ の拡大係数行列の簡約行列を求めよ。}$$

【答】 拡大係数行列を行基本変形して、

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 2 \end{array} \right] &\xrightarrow[\text{④}-2\times\text{①}]{\begin{array}{l} \text{②}-\text{①} \\ \text{③}-\text{①} \end{array}} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{④}-\text{②}]{\begin{array}{l} \text{①}-\text{②} \\ \text{③}-2\times\text{②} \end{array}} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\text{③}\leftrightarrow\text{④}} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{②}+\text{③}} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

(18) (17) の連立 1 次方程式を解け.

【答】 (17) の結果より, (17) の連立 1 次方程式は $\begin{cases} \boxed{x_1} - 2x_3 = 6 \\ \boxed{x_2} + x_3 = -2 \\ \boxed{x_4} = 2 \end{cases}$ まで同値変形される. こ

こで, “主成分に対応しない変数” x_3 を任意定数にとり, $x_3 = s$ において, 解は

$$\begin{cases} x_1 = 6 + 2s \\ x_2 = -2 - s \\ x_3 = s \\ x_4 = 2 \end{cases} \quad \text{あるいは} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (s \text{ は任意定数})$$

で与えられる (どちらか一方の形で答えればよい).

$$(19) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ -2x_1 + 3x_2 + kx_3 = 3 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = -1 \end{cases} \quad \text{の解が無数に存在するための定数 } k \text{ の条件を求めよ.}$$

【答】 説明の便宜のために与えられた連立 1 次方程式を $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と表す. 拡大係数行列 $[A \quad \mathbf{b}]$ に行基本変形を施し,

$$\begin{aligned} [A \quad \mathbf{b}] &= \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{③}-\text{①}]{\text{②}+2\times\text{①}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & k+2 & -1 \\ 0 & k+1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\text{③}-(k+1)\times\text{②}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & k+2 & -1 \\ 0 & 0 & -(k+1)(k+2) & k+2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

よって, 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ について,

- $k \neq -1, -2$ のとき, $\text{rank } A = \text{rank } [A \quad \mathbf{b}] = 3$ であるから, ただ 1 つの解が存在する.
- $k = -1$ のとき, $\text{rank } A = 2, \text{rank } [A \quad \mathbf{b}] = 3$ であるから, 解は存在しない.
- $k = -2$ のとき, $\text{rank } A = \text{rank } [A \quad \mathbf{b}] = 2$ であるから, 無数の解が存在する.

故に, 求める条件は $\boxed{k = -2}$.

(20) k が (19) で求めた条件を満たすとき, (19) の連立 1 次方程式を解け.

【答】 $k = -2$ のとき, 行基本変形により $[A \quad \mathbf{b}] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ と簡約化

されるから, (19) の連立 1 次方程式は $\begin{cases} \boxed{x_1} + x_3 = -3 \\ \boxed{x_2} = -1 \end{cases}$ まで同値変形される. ここで, “主成分に対応しない変数” x_3 を任意定数にとり, $x_3 = s$ において, 解は

$$\begin{cases} x_1 = -3 - s \\ x_2 = -1 \\ x_3 = s \end{cases} \quad \text{あるいは} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s \text{ は任意定数})$$

で与えられる (どちらか一方の形で答えればよい).