

数学演習第一・中間統一試験【問題用紙】

2022年6月15日実施・試験時間90分

— 解答用紙には答えのみ記入せよ —

1 逆三角関数について、次の問いに答えよ。

- (1) $\text{Cos}^{-1}\left(\cos\frac{8\pi}{7}\right)$ の値を求めよ。 (2) 方程式 $\text{Tan}^{-1}x + 2\text{Tan}^{-1}2 = \pi$ を解け。
(3) 関数 $y = \text{Sin}^{-1}x$ のグラフの概形を ($y = x$ のグラフとの位置関係に注意して) 解答欄に描け。ただし、定義域と値域が読み取れるように座標軸に必要な数値を書き入れよ。

2 次の極限值を求めよ。ただし、(5)において $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ である。

- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$ (5) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sinh x)^{\frac{1}{x}}$ (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Cos}^{-1}x + x - \frac{\pi}{2}}{\text{Tan}^{-1}x - x}$

3 関数の微分係数について、次の問いに答えよ。

- (7) 関数 $f(x) = (\log x)^{\log x}$ に対して、 $f'(e)$ を求めよ。
(8) 関数 $g(x) = \text{Sin}^{-1}\sqrt{1-x}$ に対して、 $g'\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めよ。
(9) 関数 $y = \frac{1}{\sinh x}$ ($x > 0$) の逆関数 $x = \varphi(y)$ に対して、 $\varphi'(2)$ を求めよ。

4 (10) 関数 $h(x) = (x+1)\sqrt{|x|}$ のすべての極値を求めよ。ただし、各極値 b に対し「 $x = a$ で極大値 (or 極小値) b 」という形で答えよ。

5 座標空間の3点 $A(-1, 1, 0)$, $B(1, 2, 3)$, $C(2, 1, 2)$ について、次の問いに答えよ。

- (11) 3点 A, B, C を通る平面の方程式を $ax + by + cz + d = 0$ の形で表せ。
(12) 原点 O と3点 A, B, C を頂点とする4面体の体積を求めよ。

6 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ と A の転置行列 tA について、次の問いに答えよ。

- (13) A の左側から適当な基本行列をいくつか掛けていくと A の簡約行列 B が得られる。これらの基本行列の積として得られる行列 P (すなわち $PA = B$ を満たす行列 P) を求めよ。
(14) tAA の第2行を答えよ。 (15) tAA の階数を求めよ。

7 連立1次方程式に関する以下の問いに答えよ。ただし、(16), (18), (20)において解が任意定数を含む場合は、任意定数の選び方は標準的な方法、すなわち線形代数の教科書に書かれている方法 (= 演習の解答例の方法) に従え。また、任意定数の文字は s, t, \dots をこの順に用いよ。

- (16) a が定数のとき、 2×2 行列の逆行列の公式を利用して、 $\begin{cases} ax + (a-1)y = -1 \\ (a+2)x + (a+1)y = 3 \end{cases}$ を解け。

- (17) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$ の拡大係数行列の簡約行列を求めよ。

(18) (17) の連立1次方程式を解け。

- (19) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ -2x_1 + 3x_2 + kx_3 = 3 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = -1 \end{cases}$ の解が無数に存在するための定数 k の条件を求めよ。

(20) k が(19)で求めた条件を満たすとき、(19)の連立1次方程式を解け。