数学演習第一・期末統一試験【解説】

2022 年 7 月 27 日実施 ・ 試験時間 90 分

$\boxed{1}$ n を自然数とするとき, 次の問いに答えよ. 但し, 解答は n で場合分けせず, 整理された形で書くこと.

(1) $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

【答】 $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ より, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-2)^n(-1)^n n!}{(1-2x)^{n+1}} = \boxed{\dfrac{2^n n!}{(1-2x)^{n+1}}}$.

(2) $f(x) = x\sin 3x$ の n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ とするとき, $f^{(n)}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ を求めよ.

【答】 ライプニッツの公式と $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ より,

$f^{(n)}(x) = 3^n x \sin\left(3x + \dfrac{n\pi}{2}\right) + n3^{n-1}\sin\left(3x + \dfrac{(n-1)\pi}{2}\right)$. よって, $f^{(n)}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) = \boxed{-n3^{n-1}}$.

$\boxed{2}$ 次の関数 $f(x)$ について, $x=0$ における 3 次の漸近展開 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$ $(x \to 0)$ の各次の係数を $\underline{(a_0, a_1, a_2, a_3)\text{ の形で}}$ 記せ. 例えば, $f(x) = 1 - 2x^2 + x^3 + o(x^3)$ $(x \to 0)$ なら, $(1, 0, -2, 1)$ となる.

(3) $f(x) = \cos x + \sin x$

【答】 $\cos x = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^3)$, $\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ より,

$f(x) = 1 + x - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$. よって, $(a_0, a_1, a_2, a_3) = \boxed{\left(1,\ 1,\ -\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{6}\right)}$.

(4) $f(x) = \dfrac{1}{1 - \log(1+x)}$

【答】 $\log(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$, $\dfrac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + X^3 + o(X^3)$ より,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1 - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)} \\ &= 1 + \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) + \left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)^2 + \left(x + o(x)\right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

よって, $(a_0, a_1, a_2, a_3) = \boxed{\left(1,\ 1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3}\right)}$.

［別法］$(1 - \log(1+x))f(x) = 1$ より,

$$\begin{aligned} 1 &= \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)) \\ &= a_0 + (-a_0 + a_1)x + \left(\frac{1}{2}a_0 - a_1 + a_2\right)x^2 + \left(-\frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{2}a_1 - a_2 + a_3\right)x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

係数を比較して, $a_0 = 1$, $\quad -a_0 + a_1 = 0$, $\quad \dfrac{1}{2}a_0 - a_1 + a_2 = 0$, $\quad -\dfrac{1}{3}a_0 + \dfrac{1}{2}a_1 - a_2 + a_3 = 0$.

よって, $(a_0, a_1, a_2, a_3) = \boxed{\left(1,\ 1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3}\right)}$.

(5) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1+x^2}}$

【答】
$$\begin{aligned} f(x) = e^{2x}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} &= \left(1 + 2x + \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{6}(2x)^3 + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) \\ &= 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

よって, $(a_0, a_1, a_2, a_3) = \boxed{\left(1,\ 2,\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{3}\right)}$.

［別法］$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}f(x)=e^{2x}$ より，

$$1+2x+\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{6}(2x)^3+o(x^3)=\Big(1+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\Big)(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+o(x^3))$$
$$=a_0+a_1x+\Big(\frac{1}{2}a_0+a_2\Big)x^2+\Big(\frac{1}{2}a_1+a_3\Big)x^3+o(x^3).$$

係数を比較して，$a_0=1,\quad a_1=2,\quad \frac{1}{2}a_0+a_2=2,\quad \frac{1}{2}a_1+a_3=\frac{4}{3}.$

よって, $(a_0,a_1,a_2,a_3)=\boxed{\Big(1,\ 2,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{3}\Big)}$.

3 (6) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x\,\mathrm{Tan}^{-1}x-x}{\sin x-x}$ を求めよ.

【答】 分母は $\sin x-x=-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$ だから，分子の 3 次の漸近展開を考える.

$(\mathrm{Tan}^{-1}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+o(x^2)$ より，$\mathrm{Tan}^{-1}x=\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$. よって

$$\cos^2 x\,\mathrm{Tan}^{-1}x-x=\Big(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\Big)^2\Big(x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\Big)-x$$
$$=\Big(1-x^2+o(x^3)\Big)\Big(x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\Big)-x$$
$$=-\frac{4}{3}x^3+o(x^3).$$

したがって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x\,\mathrm{Tan}^{-1}x-x}{\sin x-x}=\frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{1}{6}}=\boxed{8}$.

4 次の定積分の値を求めよ.

(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1+4x^2}$

【答】 $2x=t$ とおくと，$dx=\frac{1}{2}dt$ より，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1+4x^2}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\Big[\mathrm{Tan}^{-1}t\Big]_0^1=\boxed{\frac{\pi}{8}}$.

(8) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin x}$

【答】 $\tan\frac{x}{2}=t$ とおくと, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$ より,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin x}=\int_0^1\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=2\int_0^1\frac{dt}{(1+t)^2}=2\Big[\frac{-1}{1+t}\Big]_0^1=\boxed{1}.$$

(9) $\displaystyle\int_3^8\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

【答】 $\sqrt{x+1}=t$ とおくと, $x=t^2-1$, $dx=2tdt$ より,

$$\int_3^8\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}=\int_2^3\frac{2t}{(t^2-1)t}dt=\int_2^3\frac{2}{t^2-1}dt=\int_2^3\Big(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\Big)dt=\Big[\log\frac{t-1}{t+1}\Big]_2^3=\boxed{\log\frac{3}{2}}.$$

(10) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{\mathrm{Sin}^{-1}x}{1-x^2}}\,dx$

【答】

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{\mathrm{Sin}^{-1}x}{1-x^2}}\,dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{\mathrm{Sin}^{-1}x}\cdot(\mathrm{Sin}^{-1}x)'dx=\Big[\frac{2}{3}(\mathrm{Sin}^{-1}x)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{2}{3}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)^{\frac{3}{2}}=\boxed{\frac{\pi\sqrt{\pi}}{12}}.$$

$\boxed{5}$ (11) 空間ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$ の作る四面体の体積を求めよ.

【答】 $\left|\boldsymbol{p} \quad \boldsymbol{q} \quad \boldsymbol{r}\right| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -36$. よって, 求める体積は $\dfrac{1}{6}|-36| = \boxed{6}$.

$\boxed{6}$ 次の行列に対して, 逆行列の第 3 行の行ベクトルを求めよ

(12) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

【答】 行基本変形により,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[③-2\times①]{②-2\times①} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{②-③} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[③-6\times②]{①+3\times②} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -6 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{②+③} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -6 & 7 \end{array}\right].$$

よって, 逆行列の第 3 行は $\boxed{\begin{bmatrix} -2 & -6 & 7 \end{bmatrix}}$.

(13) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

【答】 行基本変形により,

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[④-2\times①]{③+①} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[③+②]{①+②} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{③\times(-1)} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[④-③]{①+③,②+③} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{③+④} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

よって, 逆行列の第 3 行は $\boxed{\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$.

$\boxed{7}$ (14) 方程式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & -1 & 1 \\ x^2 & 4 & 1 & 1 \\ x^3 & 8 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ の解を求めよ.

【答】 ヴァンデルモンドの行列式の形になっているから,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & -1 & 1 \\ x^2 & 4 & 1 & 1 \\ x^3 & 8 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-(-1))(1-2)(1-x)(-1-2)(-1-x)(2-x) = -6(x-2)(x+1)(x-1).$$

よって解は $\boxed{x = 2, -1, 1}$.

［別法］ $x=2$ を代入すると，行列の第 1 列と第 2 列が一致するので，行列式の値は 0 となる．よって，$x=2$ は解である．同様に，$x=-1,1$ も解である．第 1 列に関する余因子展開を考えると，この方程式は 3 次方程式であることがわかるので，$x=2,-1,1$ が全ての解となる．

8 行列 $A=\begin{bmatrix}1&-1&-5\\3&2&1\\4&1&3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&4&-1&2\\0&2&-3&-2\\1&4&1&1\\0&-1&0&3\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\-2&-1&0&0\\5&3&7&8\\3&8&5&6\end{bmatrix}$ に対して，次の行列式の値を求めよ．

(15) $|A|$

【答】 公式を使って直接計算してもよいし，次のように行基本変形と余因子展開を用いてもよい:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&-5\\3&2&1\\4&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&-5\\0&5&16\\0&5&23\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&16\\5&23\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1&16\\1&23\end{vmatrix}=\boxed{35}.$$

(16) $|B^2|$

【答】 $|B|=\begin{vmatrix}1&4&-1&2\\0&2&-3&-2\\1&4&1&1\\0&-1&0&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&-1&2\\0&2&-3&-2\\0&0&2&-1\\0&-1&0&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-3&-2\\0&2&-1\\-1&0&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-3&4\\0&2&-1\\-1&0&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-3&4\\2&-1\end{vmatrix}=5.$

よって，$|B^2|=|B|^2=\boxed{25}$.

(17) $|C|$

【答】 行に関する余因子展開を用いて，

$$|C|=\begin{vmatrix}2&0&0&0\\-2&-1&0&0\\5&3&7&8\\3&8&5&6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1&0&0\\3&7&8\\8&5&6\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}7&8\\5&6\end{vmatrix}=\boxed{-4}.$$

(18) $|{}^{t}BC^{-1}|$

【答】 行列式の性質を用いて，$|{}^{t}BC^{-1}|=|{}^{t}B||C^{-1}|=|B||C|^{-1}=\boxed{-\frac{5}{4}}$.

9 行列 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\5&3&3\\-1&4&1\end{bmatrix}$ の余因子行列を $\widetilde{A}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(19) $\widetilde{A}$ の第 3 行の行ベクトルを求めよ

【答】

A の第 3 列の成分の余因子を並べればよいから，

$$\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}5&3\\-1&4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1\\-1&4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1\\5&3\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}23&-5&-2\end{bmatrix}}.$$

(20) $\widetilde{A}$ の行列式 $|\widetilde{A}|$ の値を求めよ．

【答】

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\5&3&3\\-1&4&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\5&-2&-2\\-1&5&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&-2\\5&2\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1&1\\5&2\end{vmatrix}=6.$$

$A\widetilde{A}=|A|E_3$ より，$|A||\widetilde{A}|=|A|^3$ だから，$|\widetilde{A}|=|A|^2=\boxed{36}$.