

数学演習第一・期末統一試験【問題用紙】

2022 年 7 月 27 日実施 ・ 試験時間 90 分

— 解答用紙には答えのみを整理された形で記入せよ —

1 n を自然数とするとき、次の問いに答えよ。但し、解答は n で場合分けせず、整理された形で書くこと。

(1) $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ。

(2) $f(x) = x \sin 3x$ の n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ とするとき、 $f^{(n)}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ を求めよ。

2 次の関数 $f(x)$ について、 $x=0$ における 3 次の漸近展開 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$ ($x \rightarrow 0$) の各次の係数を (a_0, a_1, a_2, a_3) の形で記せ。例えば、 $f(x) = 1 - 2x^2 + x^3 + o(x^3)$ ($x \rightarrow 0$) なら、 $(1, 0, -2, 1)$ となる。

(3) $f(x) = \cos x + \sin x$ (4) $f(x) = \frac{1}{1 - \log(1+x)}$ (5) $f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+x^2}}$

3 (6) 極限値 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x \tan^{-1} x - x}{\sin x - x}$ を求めよ。

4 次の定積分の値を求めよ。

(7) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+4x^2}$ (8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$ (9) $\int_3^8 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ (10) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{\sin^{-1} x}{1-x^2}} dx$

5 (11) 空間ベクトル $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$ の作る四面体の体積を求めよ。

6 次の行列に対して、逆行列の第 3 行の行ベクトルを求めよ。

(12) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (13) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

7 (14) 方程式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & -1 & 1 \\ x^2 & 4 & 1 & 1 \\ x^3 & 8 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ の解を求めよ。

8 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ に対して、次の行列式の値を求めよ。

(15) $|A|$ (16) $|B^2|$ (17) $|C|$ (18) $|{}^tBC^{-1}|$

9 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ の余因子行列を $\tilde{A}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(19) $\tilde{A}$ の第 3 行の行ベクトルを求めよ。 (20) $\tilde{A}$ の行列式 $|\tilde{A}|$ の値を求めよ。