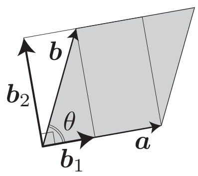
数学演習第二（演習第１回）【解答例】

線形：前期線形の復習 (空間の直線と平面，内積・外積を含む)　2022 年 10 月 5 日

演習問題 a

a1 (1) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\3\\2\end{bmatrix}=-7,\ \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1\\3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\\-7\\7\end{bmatrix},\ \|\boldsymbol{u}\|=\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{14}.$ $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ のなす角 $\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ は, $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}=-\dfrac{1}{2}$ より, $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$. また, $\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ への正射影は $\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u}=\dfrac{-1}{2}\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$. 更に, $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ の作る平行四辺形の面積は $\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|=7\sqrt{3}$. ($\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\sin\theta$ を計算してもよい.)

(2) $\boldsymbol{b}_1=\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$ を用いる方法もあるが, ここでは $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ として図形的に考える. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のなす角を $\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ とすれば, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$ より $\|\boldsymbol{b}_1\|=\big|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta\big|=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{\|\boldsymbol{a}\|}$ (右下図参照). また, $\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}_2\|=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_2$ の作る長方形の面積$)=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積$)=\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|$ より, $\|\boldsymbol{b}_2\|=\dfrac{\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$. $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ のときは $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{0}$ (上の結果は正当). なお, $n=2$ の場合は $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|$ が $|\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}]|$ で置き換わる.



(3) $\det[\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\,]=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$ を第 1 列に関して余因子展開し, 外積の定義を用いて,

$$\begin{aligned}\det[\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\,]&=a_1\begin{vmatrix}b_2&c_2\\b_3&c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_3&c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_2&c_2\end{vmatrix}\\&=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}).\end{aligned}$$

また, $\det[\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\,]$ を第 3 列に関して余因子展開すれば, 同様な計算により $\det[\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\,]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ となり,

$$\boxed{\det[\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\,]=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}$$

が得られる. (第二の等号については, 行列式の性質を用いて

$$\det[\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\,]=-\det[\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{b}\,]=\det[\,\boldsymbol{c}\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\,]=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

と考えてもよい.) 上の関係式より, ① $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\det[\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}\,]=0,\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\det[\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{b}\,]=0$ (同じ列を含む行列式の値は 0). ② $\det[\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|^2\geqslant 0$. あとは $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が 1 次独立のとき $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ を示す必要があるが, 図形的に考えて $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積$)$ より, これは明らか.

(4) 一般に $P\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot{}^{\mathrm{t}}P\boldsymbol{b}$ が成り立つ. これを用いて, $Q\boldsymbol{a}\cdot Q\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot{}^{\mathrm{t}}QQ\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. 更に, $\forall\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^3$ に対して,

$$(Q\boldsymbol{a}\times Q\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\det[Q\boldsymbol{a}\ \ Q\boldsymbol{b}\ \ Q\,{}^{\mathrm{t}}Q\boldsymbol{c}]=(\det Q)\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ {}^{\mathrm{t}}Q\boldsymbol{c}]=\pm(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot{}^{\mathrm{t}}Q\boldsymbol{c}=\pm Q(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

であるから, $Q\boldsymbol{a}\times Q\boldsymbol{b}=\pm Q(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ が従う.

a2 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=c$ に対する拡大係数行列 $[1\ \ -2\ \ 3\ \ c]$ は簡約行列であり, これより求める解は

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\0\\0\end{bmatrix}+\underbrace{s\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}\text{ に垂直}}\qquad (s,t\text{ は任意定数}).$$

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2z-3y\\3x-z\\y+2x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-3&-2\\3&0&-1\\2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ より, $A=\begin{bmatrix}0&-3&-2\\3&0&-1\\2&1&0\end{bmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ と書ける. ここで, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解をもつための条件を調べるために, $[A\quad\boldsymbol{b}]$ に行基本変形を施す:

$$\begin{aligned}[A\quad\boldsymbol{b}]&=\begin{bmatrix}0&-3&-2&b_1\\3&0&-1&b_2\\2&1&0&b_3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&-3&-2&b_1\\1&-1&-1&b_2-b_3\\2&1&0&b_3\end{bmatrix}\\&\to\begin{bmatrix}1&-1&-1&b_2-b_3\\0&-3&-2&b_1\\0&3&2&-2b_2+3b_3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1&b_2-b_3\\0&-3&-2&b_1\\0&0&0&b_1-2b_2+3b_3\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

よって, 解をもつための条件は $\underbrace{b_1-2b_2+3b_3=0}_{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0}$, すなわち $b_3=\dfrac{-b_1+2b_2}{3}$ が成り立つこと.

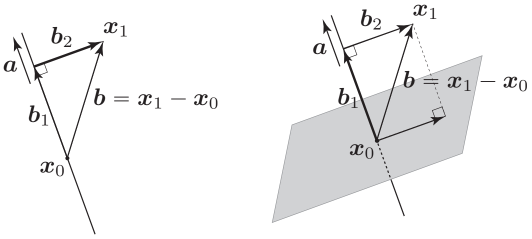
(3) (2) の条件が満たされるとき, 上の基本変形を続けて,

$$[A \quad \boldsymbol{b}] \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \frac{1}{3}b_1 + \frac{1}{3}b_2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}b_2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}b_2 \\ -\frac{1}{3}b_1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}b_2 \\ -\frac{1}{3}b_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{t_1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}\text{ に平行}}$ (t_1 は任意定数).

$\boxed{\text{a3}}$ (1) (i) 点 $\boldsymbol{x}_1$ と $\boxed{\text{c}}$ (1) の直線との距離は $\boxed{\text{a1}}$ (2) で $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0$ と考えたときの $\|\boldsymbol{b}_2\|$ に等しい (下左図). よって, 求める距離は $\dfrac{\|\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$. (“垂線の足” は $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$.)

(ii) 点 $\boldsymbol{x}_1$ と $\boxed{\text{c}}$ (2) の平面との距離は $\boxed{\text{a1}}$ (2) で $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0$ と考えたときの $\|\boldsymbol{b}_1\|$ に等しい (下右図). よって, 求める距離は $\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)|}{\|\boldsymbol{a}\|}$. (“垂線の足” は $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{x}_1 - \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$.) 平面が $ax+by+cz+d=0$ と表されるなら $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_0 + d = 0$ であるから, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_1 + d$ となり, 距離は $\dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ と表される.



(2) (i) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ が直線 AB の方向ベクトルを与えるので, 直線 AB の方程式は $x - 1 = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z+1}{3}$.

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ が平面 ABC の法線ベクトルだから, 平面 ABC の方程式は

$$3(x-1) + 5(y-1) + 4(z+1) = 0. \quad \text{これを整理して,}\ \ 3x + 5y + 4z = 4.$$

次に, (1) の (ii) を利用するために, $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (A の位置ベクトル), $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ (D の位置ベクトル), $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ (平面 ABC の法線ベクトル) とおけば, 点 D と平面 ABC の距離は $\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)|}{\|\boldsymbol{a}\|} = \dfrac{20}{\sqrt{50}} = 2\sqrt{2}$.

(iii) (ii) と同じ意味で $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{a}$ を用いる. 直線 ℓ は点 A を通り, $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとするから, その方程式は $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z+1}{4}$. また, $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ より, (1) の (i) を用いて, 点 D とこの直線の距離は $\dfrac{\|\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)\|}{\|\boldsymbol{a}\|} = \dfrac{4\sqrt{50}}{\sqrt{50}} = 4$.

【注】(ii), (iii) の距離は D から平面, 直線に下ろした垂線の長さである. (ii) では D から平面 ABC に垂線 DE を下ろせば, $\mathrm{E}(-1+3t, 3+5t, 3+4t)$ が $3x+5y+4z=4$ 上にあるから $t = -\frac{2}{5}$ となり, $\|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\| = 2\sqrt{2}$. (iii) では D から “A を通る平面 ABC の法線” に垂線 DF を下ろせば, $\mathrm{F}(1+3u, 1+5u, -1+4u)$ が $\overrightarrow{\mathrm{DF}} \perp \boldsymbol{a}$ を満たすから $u = \frac{2}{5}$ となり, $\|\overrightarrow{\mathrm{DF}}\| = 4$.

(3) (i) 直線 ℓ 上の点 $(5t+4,\, 3t-1,\, -4t-2)$ を平面 α の方程式 $5x - 4y - 3z = 5$ に代入して, $5(5t+4) - 4(3t-1) - 3(-4t-2) = 5$ となり, $t = -1$. よって, 交点 $\boldsymbol{x}_0$ の座標は $(-1, -4, 2)$.

(ii) α の法線ベクトルが $\boldsymbol{a} := \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$, ℓ の方向ベクトルが $\boldsymbol{b} := \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ より, $\boldsymbol{b}$ の平面 α への正射影は

$\boldsymbol{b} - \dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} - \dfrac{25}{50}\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \dfrac{5}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} /\!/ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. よって, 直線 m の方程式は $x + 1 = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$.

(iii) $\boldsymbol{c} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ が直線 m の方向ベクトルであるから, 直線 ℓ, m のなす角を $\theta\ (0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2})$ とすれば,

$$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|}{\|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\|} = \frac{|5+6+4|}{\sqrt{50}\sqrt{6}} = \frac{15}{10\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \therefore\ \theta = \frac{\pi}{6}. \qquad \left(\text{このとき, } \sin\theta = \frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}\right)$$

【注】一般に, 2 直線の方向ベクトルが $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ であるとき, この 2 直線のなす角 $\theta\ (\underline{0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}})$ は「$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ のなす角」または「$\boldsymbol{b}, -\boldsymbol{c}$ のなす角」のいずれかで与えられる. 従って, $\cos\theta = \dfrac{|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|}{\|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\|}$ が成り立つ.

(iv) 求める平面は $\boldsymbol{x}_0$ を通り, $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ を法線ベクトルとする. よって, 方程式は

$$5(x+1) + (y+4) + 7(z-2) = 0, \quad \text{すなわち} \quad 5x + y + 7z = 5.$$

(4) 2 直線の方向ベクトルは $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$. また, 2 直線上の点は $(5s-c,\ 3s+1,\ 4s+2), (5t-4,\ -4t+5,\ 3t-1)$ とおけることに注意する.

(i) 2 直線のなす角を $\theta\ (0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2})$ とすれば, $\cos\theta = \dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \dfrac{25}{5\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$. $\therefore\ \theta = \dfrac{\pi}{3}$.

(ii) $c = -1$ のとき, $(5s+1,\ 3s+1,\ 4s+2) = (5t-4, -4t+5,\ 3t-1) \ \Leftrightarrow\ (s,t) = (0,1)$ より, 2 直線は $(1,1,2)$ で交わる. よって, 2 直線を含む平面は点 $(1,1,2)$ を通り, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \\ -35 \end{bmatrix} /\!/ \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$ を法線ベクトルとするから, その方程式は $5(x-1) + (y-1) - 7(z-2) = 0$. $\therefore\ 5x + y - 7z + 8 = 0$.

(iii) $c = 14$ のとき, 与えられた 2 直線と求める直線 (共通垂線) の交点は

$$\mathrm{A}(5s-14,\ 3s+1,\ 4s+2), \quad \mathrm{B}(5t-4, -4t+5,\ 3t-1)$$

とおける. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方と垂直であるから, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} /\!/ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. よって, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{bmatrix} -5s+5t+10 \\ -3s-4t+4 \\ -4s+3t-3 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$ を満たす k が存在する. これより, $s = 1,\ t = 0,\ k = 1$. よって, $\mathrm{B}(-4,5,-1)$ となるから, 求める直線の方程式は $\dfrac{x+4}{5} = y - 5 = \dfrac{z+1}{-7}$.

レポート課題

I (1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ -10 \\ -13 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}$, $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -7 \\ -14 \\ 7 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}}$. (結合法則は不成立!)

一般に, $\boxed{\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}}$ が成り立つことが知られている.

(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ -14 \\ 7 \end{bmatrix} = \boxed{-63}$. 一般に, $\boxed{(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}) = \det\begin{bmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{bmatrix}}$.

II (3) 拡大係数行列を簡約化すると, $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

よって, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ (t は任意定数) となり, ℓ の方程式は $\boxed{\dfrac{x-2}{-7} = \dfrac{y-1}{-4} = z}$.

(4) $\mathrm{A}(2,1,0)$ となる. $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ とおけば, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ の直線 ℓ への正射影は $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ ($= \boldsymbol{b}$ とおく).

よって, 点 P と直線 ℓ との距離は $\sqrt{\|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\|^2 - \|\boldsymbol{b}\|^2} = \sqrt{19 - \dfrac{66}{9}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{105}}{3}}$.

演習問題 b

b1 (1) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 10 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -10 \\ 2 & 5 & -4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -10 \\ 0 & 9 & -10 & 25 \\ 0 & 10 & -7 & 36 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -10 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \\ 0 & 10 & -7 & 36 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -37 & -74 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & 10 & 6 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -14 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b2 (1) 係数行列の行列式は $\begin{vmatrix} a & 2 \\ 3 & a+1 \end{vmatrix} = a^2 + a - 6 = (a+3)(a-2)$. よって,

- $a \neq -3, 2$ ならば, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & a+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{(a+3)(a-2)} \begin{bmatrix} a+1 & -2 \\ -3 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{a-2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- $a = -3$ ならば, $3x_1 - 2x_2 = 1$ となり, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.
- $a = 2$ ならば解なし.

解をもつ条件は $a \neq 2$.

(2) $\begin{bmatrix} 5 & 17 & -13 & 2 \\ 4 & 14 & -12 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 14 & -12 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & a-2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 4 & a-2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a-\frac{7}{2} \end{bmatrix}$

より, 解をもつ条件は $a = \dfrac{7}{2}$. このとき, 解は $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b3 (1) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 8 & -7 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 16 & -14 \\ 0 & 4 & a-3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & a-3 \\ 0 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & a-3 \\ 0 & 0 & -2a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 非自明な解をもつ条件は $a = -\dfrac{1}{2}$.

このとき, $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となるので, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{7}{8} \\ 1 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -10 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$.

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -(a-6) \\ 6 & a+3 & 6 \\ a & 3 & 3 \end{vmatrix} = (a-3)^2(a+3)$ より, 非自明な解をもつ条件は $a = \pm 3$. $a = 3$ のとき, (係数行列) $\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

より, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. $a = -3$ のとき, (係数行列) $\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b4 (1) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 14 & 14 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 14 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$ より, 階数は 3 で, 逆行列は $\begin{bmatrix} 0 & 14 & -9 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 階数は $3\ (< 4)$ で, 逆行列は存在しない.

(3) $\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$ より, 階数は 4 で, 逆行列は $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b5 (1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 11.$ (2) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & -9 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} 2 \begin{vmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+3} 6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 12.$

(3) $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = (x+3a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = (x+3a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = (x+3a)(x-a)^3.$

(4) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix} = \cdots = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4.$

b6 (1) $\Delta(a,b,c) := \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b) = \overbrace{abc(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0}^{a,b,c\ \text{は}\ 0\ \text{でなく, 互いに異なる}}.$

(2) $x = \dfrac{\Delta(d,b,c)}{\Delta(a,b,c)} = \dfrac{dbc(d-b)(b-c)(c-d)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)} = \dfrac{d(d-b)(c-d)}{a(a-b)(c-a)},\ y = \dfrac{d(a-d)(d-c)}{b(a-b)(b-c)},\ z = \dfrac{d(b-d)(d-a)}{c(b-c)(c-a)}.$