数学演習第二（演習第２回）

微積：前期微積の復習（広義積分を含む）　2022 年 10 月 12 日

要点（広義積分）

〈広義積分の定義〉 閉区間でない区間における連続関数の積分を考える (非有界な関数や無限区間を想定).

- 区間 $[a,b)$ $(-\infty < a < b \leqslant \infty)$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して, $f(x)$ の $[a,b)$ における積分を

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\beta\to b-0}\int_a^\beta f(x)\,dx \quad (b=\infty \text{ のときは } \lim_{\beta\to\infty} \text{ と読み替える})$$

によって定義する. 右辺が収束するとき, $f(x)$ は区間 $[a,b)$ で **積分可能** あるいは 積分が **収束**するといい, 収束しないとき **発散**するという.

- 区間 $(a,b]$ $(-\infty \leqslant a < b < \infty)$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して, $f(x)$ の $(a,b]$ における積分を

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\alpha\to a+0}\int_\alpha^b f(x)\,dx \quad (a=-\infty \text{ のときは } \lim_{\alpha\to-\infty} \text{ と読み替える})$$

によって定義する. 用語については上と同様.

- 区間 (a,b) $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して, $f(x)$ の (a,b) における積分を

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\substack{\alpha\to a+0\\ \beta\to b-0}}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \quad (a=-\infty \text{ または } \beta=\infty \text{ なら上と同じ読み替え})$$

によって定義する. この積分が収束するのは, 任意の $c\in(a,b)$ に対して, $(a,c]$, $[c,b)$ における積分が収束するときであり, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ が成り立つ.

上のようにして定義される積分を **広義積分** という.

〈広義積分の収束条件〉 $[a,b)$ 上の連続関数 $f(x)$, $g(x)$ ($g(x)$ は積分可能性の分かった非負関数) に対して,

- $|f(x)| \leqslant g(x)$ かつ $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx < \infty$ (積分が収束) ならば, 積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する.
- $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ かつ $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = \infty$ ならば, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \infty$ (積分は ∞ に発散).

他のタイプの区間における広義積分についても同様な主張が成り立つ.

区間 $[a,b)$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して, その原始関数 (不定積分) $F(x)$ が分かっていれば,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to b-0}\Big[\,F(x)\,\Big]_a^\beta = \lim_{\beta\to b-0} F(\beta) - F(a).$$

ここで, $\displaystyle\lim_{\beta\to b-0}\Big[\,F(x)\,\Big]_a^\beta$ は $\Big[\,F(x)\,\Big]_a^{b-0}$ $\Big(\Big[\,F(x)\,\Big]_a^\infty$ $(b=\infty$ のとき$)\Big)$ とも書かれる.

例 1
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \Big[-2\sqrt{1-x}\Big]_0^{1-0} = 2 \qquad (\text{区間 } [0,1) \text{ における積分}),$$
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^\infty = 1 \qquad (\text{区間 } [1,\infty) \text{ における積分}).$$

例 2
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big[\mathrm{Sin}^{-1}\,x\Big]_{-1+0}^{1-0} = \frac{\pi}{2} - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \pi \qquad (\text{区間 } (-1,1) \text{ における積分}),$$
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\mathrm{Tan}^{-1}\,x\Big]_{-\infty}^\infty = \frac{\pi}{2} - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \pi \qquad (\text{区間 } (-\infty,\infty) \text{ における積分}).$$

例 3
$$\int_0^1 \log x\,dx = \Big[x(\log x - 1)\Big]_{+0}^1 = (-1) - \lim_{x\to+0} x\log x = -1 \qquad (\text{区間 } (0,1] \text{ における積分}).$$

演習問題 a （広義積分）

a1 区間 $(0,\infty)$ 上の連続関数 $\dfrac{1}{x^s}$ ($s>0$ は定数) に対して次を示せ.

(1) $\displaystyle \int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-s} & (\text{if } \ 0<s<1) \\ \infty & (\text{if } \ s \geqslant 1) \end{cases}$ (区間 $(0,1]$ における積分).

(2) $\displaystyle \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \dfrac{1}{s-1} & (\text{if } \ s>1) \\ \infty & (\text{if } \ 0<s \leqslant 1) \end{cases}$ (区間 $[1,\infty)$ における積分).

【注】上の等式は, 広義積分の収束・発散を判定する際によく用いられる.

a2 次の広義積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$ (2) $\displaystyle \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ (3) $\displaystyle \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+x+1}$

(4) $\displaystyle \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+3x+2}$ (5) $\displaystyle \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$ (6) $\displaystyle \int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,dx$

(7) $\displaystyle \int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx$ (8) $\displaystyle \int_0^\infty (1-\tanh x)\,dx$ (9) $\displaystyle \int_0^\infty \frac{dx}{\cosh x}$

a3 次の広義積分が収束することを示せ.

(1) $\displaystyle \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ (2) $\displaystyle \int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx$ (3) $\displaystyle \int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$

レポート課題

- **答だけでなく, 計算の過程も**書いて下さい. （A4 **用紙１～２枚**にまとめ, pdf ファイルに変換して提出）
- 授業に出席し, レポートを授業翌日までに **WebClass に提出** して「出席」となります.

I 次の広義積分の値を求めよ. 但し, a,b は正定数とする.

(1) $\displaystyle \int_1^\infty \frac{\log x}{x\sqrt{x}}\,dx$ (2) $\displaystyle \int_0^\infty \frac{dx}{x^4+3x^2+2}$ (3) $\displaystyle \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx$ (a,b は正定数)

II $0<a<1$ のとき, 積分 $\displaystyle \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$ が収束することを示せ.

(ヒント: $\displaystyle \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx + \int_1^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$ と分けて, a1 の結果を利用せよ.)

演習問題b （微積第一の復習） —自習用—

b1 次の値を求めよ.

(1) $\mathrm{Cos}^{-1}\left(\sin\dfrac{12\pi}{11}\right)$　(2) $\cos\left(\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{15}\,\right)$　(3) $2\,\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{2}-\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{7}$

b2 次の導関数または高階導関数を求めよ. 但し, n は自然数とする.

(1) $f(x)=\mathrm{Tan}^{-1}(x^2+1)$ に対する $f'(x)$

(2) $f(x)=\log|x^3-3x+2|$ に対する $f^{(n)}(x)$

(3) $f(x)=x^2\sin x$ に対する $f^{(n)}(x)$

b3 $x=0$ の周りで次の関数 $f(x)$ を 4 次の項まで漸近展開せよ. すなわち, $f(x)$ を

$$f(x)=a_0+a_1\,x+a_2\,x^2+a_3\,x^3+a_4\,x^4+o(x^4)\quad(x\to 0)$$

の形に表せ.

(1) $f(x)=e^{3x}\log(1+2x)$　(2) $f(x)=\dfrac{e^{x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$　(3) $f(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2}\,)$

b4 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{6\sin x-6x+x^3}{xe^{x^2}-x-x^3}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Tan}^{-1}x-x}{x^3}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Tan}^{-1}(2x)}{e^{3x}-1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(a\,\mathrm{Tan}^{-1}x\right)^x$　($a>0$ は定数)　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

b5 有限マクローリン展開を用いて次の不等式がすべての自然数 n に対して成立することを示せ.

(1) $\displaystyle e^x\leqslant\sum_{n=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\ \ (x\geqslant 0).$　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\leqslant\log(1+x)\leqslant\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\ \ (x\geqslant 0).$

b6 次の不定積分または定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{Tan}^{-1}x\,dx$　(2) $\displaystyle\int_1^2\frac{6x+1}{3x^2+x-2}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\frac{dx}{1+2\cos x}$