数学演習第二（演習第２回）　【解答例】

微積：前期微積の復習（広義積分を含む）　2022 年 10 月 12 日

演習問題 a

a1 $\dfrac{1}{x^s}$ $(x>0)$ の不定積分 (積分定数省略) は

$$0<s\neq 1 \text{ のとき } \int \frac{dx}{x^s}=\int x^{-s}\,dx=\frac{x^{1-s}}{1-s},\quad s=1 \text{ のとき } \int \frac{dx}{x}=\log x.$$

これを用いて,

(1) $0<s\neq 1$ のとき $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^s}=\Big[\,\frac{x^{1-s}}{1-s}\,\Big]_{+0}^{1}=\begin{cases}\frac{1}{1-s} & (s<1)\\ \infty & (s>1)\end{cases}$, $\quad s=1$ のとき $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}=\big[\log x\big]_{+0}^{1}=\infty.$

(2) $0<s\neq 1$ のとき $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}=\Big[\,\frac{x^{1-s}}{1-s}\,\Big]_{1}^{\infty}=\begin{cases}\frac{1}{s-1} & (s>1)\\ \infty & (s<1)\end{cases}$, $\quad s=1$ のとき $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}=\big[\log x\big]_{1}^{\infty}=\infty.$

a2 (1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx=\Big[\,2\sqrt{x}\,\log x\,\Big]_{+0}^{1}-2\int_0^1\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx=0-2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=-2\Big[\,2\sqrt{x}\,\Big]_0^1=-4.$

(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\big(\frac12\big)^2-\big(x-\frac12\big)^2}}=\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x-\frac12}{\frac12}=\mathrm{Sin}^{-1}(2x-1)$ より,

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\Big[\,\mathrm{Sin}^{-1}(2x-1)\,\Big]_{+0}^{1-0}=\frac{\pi}{2}-\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)=\pi.$$

(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\int\frac{dx}{\big(x+\frac12\big)^2+\big(\frac{\sqrt3}{2}\big)^2}=\frac{1}{\frac{\sqrt3}{2}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x+\frac12}{\frac{\sqrt3}{2}}=\frac{2}{\sqrt3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt3}$ より,

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+x+1}=\Big[\,\frac{2}{\sqrt3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt3}\,\Big]_0^\infty=\frac{2}{\sqrt3}\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\Big)=\frac{2\pi}{3\sqrt3}.$$

(4) $\displaystyle\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$ より,

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+3x+2}=\int_0^\infty\Big(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\Big)\,dx=\Big[\,\log\frac{x+1}{x+2}\,\Big]_0^\infty=0-\log\frac12=\log 2.$$

(5) まず, $\displaystyle\frac{1}{x^3+1}=\frac13\Big(\frac{1}{x+1}+\frac{-x+2}{x^2-x+1}\Big)$ と部分分数分解できることに注意する．ここで,

$$\frac{-x+2}{x^2-x+1}=\frac{-\frac12(2x-1)+\frac32}{x^2-x+1}=-\frac12\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac32\cdot\frac{1}{\big(x-\frac12\big)^2+\big(\frac{\sqrt3}{2}\big)^2}$$

より,

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x^3+1}&=\frac13\Big\{\log|x+1|-\frac12\log(x^2-x+1)+\frac32\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt3}{2}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x-\frac12}{\frac{\sqrt3}{2}}\Big\}\\&=\frac16\log\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt3}.\end{aligned}$$

よって,

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x^3+1}=\Big[\,\frac16\log\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt3}\,\Big]_0^\infty=\frac16\log\frac11+\frac{1}{\sqrt3}\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\Big)=\frac{2\pi}{3\sqrt3}.$$

(6) $x^2=t$ とおけば $x\,dx=\dfrac{dt}{2}$ より,

$$\int_0^\infty x^3e^{-x^2}\,dx=\frac12\int_0^\infty te^{-t}\,dt=\frac12\Big(\Big[\,-te^{-t}\,\Big]_0^\infty+\int_0^\infty e^{-t}\,dt\Big)=\frac12\Big[-e^{-t}\Big]_0^\infty=\frac12.$$

(7) 部分分数分解を繰り返して,

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx = \Big[e^{-x}\sin x\Big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$$
$$= \Big[-e^{-x}\cos x\Big]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx = 1 - \int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx.$$

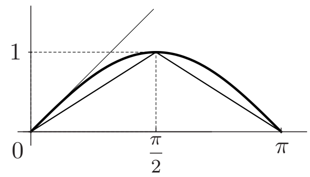
よって, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx \ \left(= \int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx\right) = \frac{1}{2}.$

(8) $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{(\cosh x)'}{\cosh x}$ より,

$$\int_0^\infty (1-\tanh x)\,dx = \Big[x - \log(\cosh x)\Big]_0^\infty = \lim_{x\to\infty}(x - \log(\cosh x))$$
$$= \lim_{x\to\infty}\log\frac{e^x}{\cosh x} = \lim_{x\to\infty}\log\frac{2}{1+e^{-2x}} = \log 2.$$

(9) $\dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{\cosh x}{\cosh^2 x} = \dfrac{(\sinh x)'}{1+\sinh^2 x}$ より, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\cosh x} \overset{\sinh x = t}{=} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\mathrm{Tan}^{-1}\,t\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$

$\boxed{\text{a3}}$ (1) まず, 区間 $(0,\pi)$ 上の正値連続関数 $\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$ は $x = \dfrac{\pi}{2}$ に関して対称であるから, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ が収束することを示せば十分. 次に, $0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ において $y = \sin x$ は上に凸ゆえ $0 < \dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin x\ (\leqslant x)$ (右図参照), 従って $0 < \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}} \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$.



ここで, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,dx \overset{\frac{2x}{\pi}=y}{=} \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} = \pi < \infty$ より $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ は収束する.

《別法》 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = 1$ であるから, 区間 $(0,a]$ $(a>0:$ 十分小$)$ において $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ が成り立つ. よって, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 < \infty$ から $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ が収束することが分かる (収束性が問題になるのは $x=0$ の近くのみ).

(2) $0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ において, $\sin x \geqslant \dfrac{2x}{\pi} > 0$ より $|\log(\sin x)| = -\log(\sin x) \leqslant -\log\dfrac{2x}{\pi}$ ($-\log x$ は単調減少関数). ここで,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\log\frac{2x}{\pi}\right)dx \overset{\frac{2x}{\pi}=y}{=} -\frac{\pi}{2}\int_0^1 \log y\,dy = \frac{\pi}{2} < \infty$$

であるから, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx$ は収束する. (値は $-\dfrac{\pi}{2}\log 2$ となることが知られている.)

《別法》 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\,\log(\sin x) = \lim_{x\to+0}\frac{\log(\sin x)}{x^{-1/2}} \overset{\text{ロピタル}}{=} \lim_{x\to+0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = -2\lim_{x\to+0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\sqrt{x}\,\cos x\right) = 0$ であるから, 区間 $(0,a]$ $(a>0:$ 十分小$)$ において $|\log(\sin x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ が成り立つ. よって, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 < \infty$ から $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx$ が収束することが分かる (収束性が問題になるのは $x=0$ の近くのみ).

(3) $0 < x \leqslant 1$ において $\left|\dfrac{\log x}{1+x^2}\right| \leqslant |\log x|$ で, $\displaystyle\int_0^1 |\log x|\,dx = -\int_0^1 \log x\,dx = 1 < \infty$ であるから $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ は収束する. 次に, $x \geqslant 1$ において, $0 \leqslant \dfrac{\log x}{1+x^2} = \dfrac{\log x}{\sqrt{x}}\,\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2} \leqslant \dfrac{C}{x^{3/2}}$ ($\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$ より, $x \geqslant 1$ において $0 \leqslant \dfrac{\log x}{\sqrt{x}} \leqslant {}^{\exists}C < \infty$) であり, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} = 2 < \infty$ であるから $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ も収束する. よって,

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$$

は収束する. (実は, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx \overset{\frac{1}{x}=y}{=} \int_1^0 \frac{\log\frac{1}{y}}{1+\frac{1}{y^2}}\left(-\frac{dy}{y^2}\right) = -\int_0^1 \frac{\log y}{y^2+1}\,dy = -\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ であるから, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = 0$ と分かる.)

レポート課題

I (1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x\sqrt{x}}\,dx = \int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}}\log x\,dx = \Big[-2x^{-\frac{1}{2}}\log x\Big]_1^\infty + 2\int_1^\infty x^{-\frac{1}{2}}\cdot x^{-1}\,dx = 2\Big[-2x^{-\frac{1}{2}}\Big]_1^\infty = 4.$

(2) $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+3x^2+2} = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2}\right)dx$$
$$= \Big[\operatorname{Tan}^{-1} x - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Tan}^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}-1)\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(3) 部分積分を 2 回繰り返す.
$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{b}\Big[e^{-ax}\sin bx\Big]_0^\infty + \frac{a}{b}\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$$
$$= \frac{a}{b^2}\Big[-e^{-ax}\cos bx\Big]_0^\infty - \frac{a^2}{b^2}\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx.$$

よって, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)^{-1}\frac{a}{b^2} = \frac{a}{a^2+b^2}.$ $\displaystyle\left(\text{同様にして } \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}.\right)$

II $0 < x \leqslant 1$ において, $\dfrac{x^{a-1}}{1+x} \leqslant x^{a-1} = \dfrac{1}{x^{1-a}}$ であり, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-a}} = \frac{1}{a} < \infty$ であるから $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}$ は収束する. 次に, $1 \leqslant x < \infty$ において, $\dfrac{x^{a-1}}{1+x} \leqslant \dfrac{x^{a-1}}{x} = \dfrac{1}{x^{2-a}}$ であり, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{2-a}} = \frac{1}{1-a} < \infty$ であるから $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$ も収束する. よって,
$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx + \int_1^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$$
は収束する. (値は $\dfrac{\pi}{\sin\pi a}$ となることが知られている.)

演習問題b

b1 (1) $\sin\dfrac{12\pi}{11} = \sin\left(\pi - \dfrac{12\pi}{11}\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{11}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{11}\right)\right) = \cos\dfrac{13\pi}{22}$ かつ $0 < \dfrac{13\pi}{22} < \pi$ であるから, $\operatorname{Cos}^{-1}\left(\sin\dfrac{12\pi}{11}\right) = \dfrac{13\pi}{22}.$

(2) $\alpha = \operatorname{Tan}^{-1}\sqrt{15}$ とおけば $\tan\alpha = \sqrt{15}$ かつ $<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. このとき, $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{1}{16}$. $\cos\alpha > 0$ より $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}.$

(3) $\alpha = \operatorname{Tan}^{-1}\dfrac{1}{2}$, $\beta = \operatorname{Tan}^{-1}\dfrac{1}{7}$ とおけば, $0 < \dfrac{1}{7} < \dfrac{1}{2} < 1$ より $0 < \beta < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ となり, $0 < 2\alpha - \beta < \dfrac{\pi}{2}$. 一方, $\tan 2\alpha = \dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-(\frac{1}{2})^2} = \dfrac{4}{3}$, $\tan\beta = \dfrac{1}{7}$ より, $\tan(2\alpha-\beta) = \dfrac{\tan 2\alpha - \tan\beta}{1+\tan 2\alpha\tan\beta} = 1$. よって, $2\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{4}.$

b2 (1) $f'(x) = \dfrac{2x}{1+(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{x^4+2x^2+2}.$

(2) $\log|x^3-3x+2| = 2\log|x-1| + \log|x+2|$ より, $n \geqslant 1$ に対して,
$$f^{(n)}(x) = \frac{2(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n} + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+2)^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\left\{\frac{2}{(x-1)^n} + \frac{1}{(x+2)^n}\right\}.$$

(3) ライプニッツの公式を用いて,
$$f^{(n)}(x) = x^2\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\pi\right) + 2nx\sin\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right) + n(n-1)\sin\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\pi\right)$$
$$= \{x^2 - n(n-1)\}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - 2nx\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

b3 いずれも $x \to 0$ で考える.

(1) $e^{3x} = 1 + 3x + \dfrac{9}{2}x^2 + \dfrac{9}{2}x^3 + \dfrac{27}{8}x^4 + o(x^4)$, $\log(1+2x) = 2x - 2x^2 + \dfrac{8}{3}x^3 - 4x^4 + o(x^4)$ より,
$e^{3x}\log(1+2x) = 2x + 4x^2 + \dfrac{17}{3}x^3 + 4x^4 + o(x^4).$

(2) $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$ より,
$\frac{e^{x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$.

(3) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ を積分して, $\log(x + \sqrt{1+x^2}\,) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$.

$\boxed{\text{b4}}$ (1) $x \to 0$ のとき, $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$, $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5)$ であるから,

$$\frac{6\sin x - 6x + x^3}{xe^{x^2} - x - x^3} = \frac{\frac{1}{20}x^5 + o(x^5)}{\frac{1}{2}x^5 + o(x^5)} \to \frac{1}{10}.$$

(2) $x \to 0$ のとき, $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$ を積分して, $\mathrm{Tan}^{-1}\,x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$. よって, $\frac{\mathrm{Tan}^{-1}\,x - x}{x^3} \to -\frac{1}{3}$.

(3) ロピタルの定理を用いて, $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Tan}^{-1}(2x)}{e^{3x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{1+4x^2}}{3e^{3x}} = \frac{2}{3}$.

(4) $\log(a\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x)^x = x\log(a\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x)$ において, $x \to \infty$ のとき $\log(a\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x) \to \log\frac{\pi a}{2} \lesseqqgtr 0 \ \left(a \lesseqqgtr \frac{2}{\pi}\right)$ であるから, $\lim_{x\to\infty} x\log(a\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x) = -\infty$ $(0 < a < \frac{2}{\pi})$, $= \infty$ $(a > \frac{2}{\pi})$. $a = \frac{2}{\pi}$ のときは不定形であり, ロピタルの定理により, $\lim_{x\to\infty} x\log\left(\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(\mathrm{Tan}^{-1}\,x) + \log\frac{2}{\pi}}{x^{-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\mathrm{Tan}^{-1}\,x}\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{\pi}$. よって求める極限値は $e^{-\frac{2}{\pi}}$.

(5) $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ より $\frac{\tan x}{x} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$. これと $\log(1+x) = x + o(x)$ とから, $\log\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2} = \frac{\log(1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2))}{x^2} = \frac{\frac{1}{3}x^2 + o(x^2)}{x^2} \to \frac{1}{3}$. よって, 求める極限値は $e^{1/3}$.

$\boxed{\text{b5}}$ (1) e^x を有限マクローリン展開すると, $\mathbb{R}$ 上で,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x), \quad R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (0 < {}^\exists\theta = \theta(x) < 1).$$

$x \geqslant 0$ においては $R_{n+1}(x) \geqslant 0$ であるから, $e^x \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ が成り立つ.

(2) $\log(1+x)$ を有限マクローリン展開すると, $x > -1$ のとき,

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,x^k + R_{2n+1}(x), \quad R_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\theta x)^{2n+1}} \quad (0 < {}^\exists\theta = \theta(x) < 1).$$

$x \geqslant 0$ においては

$$0 \leqslant R_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\theta x)^{2n+1}} \leqslant \frac{(-1)^{(2n+1)-1}}{2n+1}\,x^{2n+1}$$

であるから, $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,x^k \leqslant \log(1+x) \leqslant \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,x^k$ が成り立つ.

$\boxed{\text{b6}}$ (1)
$$\int x^2\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x\,dx = \int\left(\frac{x^3}{3}\right)'\mathrm{Tan}^{-1}\,x\,dx = \frac{x^3}{3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x - \frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x - \frac{1}{3}\int\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^3}{3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\log(1+x^2) + C.$$

(2) $3x^2 + x - 2 = t$ とおくと, $\int_1^2 \frac{6x+1}{3x^2+x-2}\,dx = \int_2^{12}\frac{dt}{t} = \big[\log t\big]_2^{12} = \log 6$.

(3) $\tan\frac{x}{2} = t$ とおくと, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$ より,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+2\cos x} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+2\,\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{2\,dt}{3-t^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}-t} + \frac{1}{\sqrt{3}+t}\right)dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\log\frac{\sqrt{3}+t}{\sqrt{3}-t}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\log 2}{\sqrt{3}}.$$