数学演習第二 （演習第３回） 【解答例】

線形：ベクトル空間・部分空間　(2022 年 10 月 26 日実施)

演習問題

1 部分空間となる条件は, **【要点】**の**〈部分空間の条件〉(i), (ii), (iii)** を満たすことである. 逆に言えば, 部分空間とならないことを示すには条件 (i), (ii), (iii) のいずれかひとつを満たさない具体的な反例をあげればよい.

(1) $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \in W$ だが, その -1 倍は $\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} \notin W$ なので部分空間ではない.

(2) $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \in W$ だが, その $1/2$ 倍は $\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix} \notin W$ なので部分空間ではない.

(3) $\mathbf{0} \in W$. $\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix} \in W$ のとき, $(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)+(z_1+z_2) = (x_1+2y_1+z_1)+(x_2+2y_2+z_2) = 0$ なので, $\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{bmatrix} \in W$. また, $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in W$, $k \in \mathbb{R}$ に対し, $kx+2(ky)+kz = k(x+2y+z) = 0$ より, $k\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}kx\\ky\\kz\end{bmatrix} \in W$. 以上により条件 (i), (ii), (iii) の全てを満たすので, W は部分空間.

(4) $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \in W$ であるが, その和 $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} \notin W$ なので部分空間ではない.

(5) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \in W$ であるが, その和 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \notin W$ なので部分空間ではない.

(6) (3) と同じようにして確認できるが, (3), (6) はいずれも同次形連立一次方程式の解空間なので部分空間である (教科書 **命題 15.4**).

(7) $\mathbf{0}$ が属していないので部分空間ではない.

(8) $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & -4 & 3\\1 & -3 & 3\end{bmatrix}$ とおけば, $W = \{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3 \mid$ 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ が解 $\boldsymbol{x}$ を持つ $\}$ と表せる.
まず, $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ より $\mathbf{0} \in W$. 次に, $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}' \in W$ とすれば, W の定義により $A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$, $A\boldsymbol{x}_0' = \boldsymbol{b}'$ を満たす $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_0' \in \mathbb{R}^3$ が存在する. このとき,

$$A(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_0') = A\boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{x}_0' = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}', \quad A(k\boldsymbol{x}_0) = kA\boldsymbol{x}_0 = k\boldsymbol{b} \quad (k \in \mathbb{R})$$

であるから, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}'$ は解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1$ を持ち, $A\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{b}$ は解 $\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{x}_0$ を持つ. よって, $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}', k\boldsymbol{b} \in W$ $(k \in \mathbb{R})$ が示された. 以上により, 条件 (i), (ii), (iii) の全てを満たすので, W は部分空間である.

2 (1) $\left[\begin{array}{cc|cc}-1 & 3 & 1 & -2\\3 & -9 & 2 & 6\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc}1 & -3 & -1 & 2\\0 & 0 & 5 & 0\end{array}\right]$ より, $\boldsymbol{v} \notin W$, $\boldsymbol{w} \in W$.

(2) $\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -3 & 13 & 13 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -9 & 7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -3 & 13 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -22 & -24 \\ 0 & 1 & 5 & -22 & -6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -3 & 13 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -22 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \end{array}\right]$ より,

$\boldsymbol{v} \in W$, $\boldsymbol{w} \notin W$.

(3) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 2 & 3 & 1 & b \\ 4 & 1 & 3 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 5 & -1 & b-2a \\ 0 & 5 & -1 & c-4a \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 5 & -1 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & -b+c-2a \end{array}\right]$ より,

$\boldsymbol{v} \in W \iff 2a+b-c=0$.

(4) $\left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 6 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -10 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$ より,

$\boldsymbol{v} \in W$, $\boldsymbol{w} \notin W$.

(5) $\left[\begin{array}{cccc|cc} 2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

より, $\boldsymbol{v} \notin W$, $\boldsymbol{w} \in W$.

3 (1) (**注**:講義で配付した問題に「和空間 $W_1 + W_2$」を追加した)

W_1 は直線 $y = \dfrac{2}{3}x$ (図 1). W_2 は直線 $y = -x$ (図 2). 共通部分 $W_1 \cap W_2$ は 2 直線の交点の原点のみ (図 3). 和集合 $W_1 \cup W_2$ は 2 直線 $y = \dfrac{2}{3}x$, $y = -x$ の合併 (図 4). 和空間 $W_1 + W_2$ は平面全体 (図 5). $\mathbb{R}^2$ の任意のベクトルが W_1, W_2 に平行なベクトルの和で書けることは明らか (与えられたベクトルを対角線とし, W_1, W_2 に平行な辺をもつ平行四辺形を考えよ).

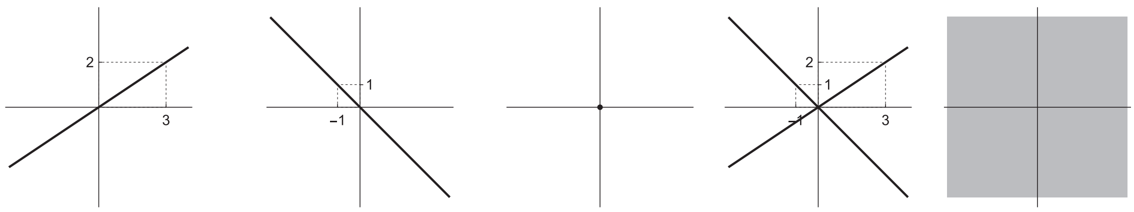

図 1. $W_1 : y = \dfrac{2}{3}x$　図 2. $W_2 : y = -x$　図 3. $W_1 \cap W_2$　図 4. $W_1 \cup W_2$　図 5. $W_1 + W_2$

また, $W_1 \cup W_2$ が $\mathbb{R}^2$ の部分空間とならないことは, $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ が直線 $W_1 : y = \dfrac{2}{3}x$ 上にも直線 $W_2 : y = -x$ 上にもないため, $W_1 \cup W_2$ に属さないことからわかる.

(2) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1$ となる条件は, $\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & -5 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & -6 & -x+z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & 0 & 2x+3y+z \end{array}\right]$ より, $2x + 3y + z = 0$. つまり, W_1 は平面 $2x + 3y + z = 0$ を表している. 別の見方をすると, $W_1 = \{c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ は, $\mathbb{R}^3$ 内で $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ によって張られる平面であるから, $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} /\!/ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ を法線ベクトルとし, 原点を通る平面 $2x + 3y + z = 0$ となる.

同様に, W_2 についても, $\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 2 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -x+y \\ 0 & 2 & x+z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -x+y \\ 0 & 0 & 3x-2y+z \end{array}\right]$ より, W_2 は平面 $3x - 2y + z = 0$. 外積 $\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ からもわかる.

共通部分 $W_1 \cap W_2$ は連立一次方程式 $\begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases}$ の解全体に一致するから,
$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 13 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{13} \\ 0 & 1 & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$ から, $W_1 \cap W_2$ に属する元は $k\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 13 \end{bmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$ となる. これは, 原点を通り, 方向ベクトル $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -13 \end{bmatrix}$ の直線 $\dfrac{x}{5} = y = \dfrac{z}{-13}$ である. 別の見方をすると, 2 つの平面 W_1, W_2 の交線は, W_1, W_2 の法線ベクトル $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4$ のいずれとも垂直であるから, $(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \times (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ -26 \end{bmatrix} // \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -13 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとし, 原点を通る直線 $\dfrac{x}{5} = y = \dfrac{z}{-13}$ となる.

また, $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & 1 & 1 & y \\ 1 & -5 & -1 & 2 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 2 & 1 & x+y \\ 0 & -6 & -2 & 2 & -x+z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 2 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 2x+3y+z \end{array}\right]$ から, $\mathbb{R}^3$ のどんなベクトルも $W_1 + W_2 = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \rangle$ に属することがわかるので, $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$. なお, $W_1 \cup W_2$ が $\mathbb{R}^3$ の部分空間とならないことは, $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ が平面 $W_1 : 2x+3y+z=0$ 上にも平面 $W_2 : 3x-2y+z=0$ 上にもないため, $W_1 \cup W_2$ に属さないことからわかる.

レポート課題

(1) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} 4z-5y=0 \\ 5x-3z=0 \\ 3y-4x=0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 3t \\ 4t \\ 5t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} \left(= \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle \right)$ と表される. $t=0$ として, $\mathbf{0} \in W$. さらに, $t_1, t_2, k \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{bmatrix} 3t_1 \\ 4t_1 \\ 5t_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3t_2 \\ 4t_2 \\ 5t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(t_1+t_2) \\ 4(t_1+t_2) \\ 5(t_1+t_2) \end{bmatrix}, \quad k\begin{bmatrix} 3t_1 \\ 4t_1 \\ 5t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(kt_1) \\ 4(kt_1) \\ 5(kt_1) \end{bmatrix} \in W.$$

よって, W は条件 (i), (ii), (iii) を満たすので, $\mathbb{R}^3$ の部分空間である.

《別法 1》まず, $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in W$. 次に, $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \in W$, $k \in \mathbb{R}$ とすれば,

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(z_1+z_2)-5(y_1+y_2) \\ 5(x_1+x_2)-3(z_1+z_2) \\ 3(y_1+y_2)-4(x_1+x_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4z_1-5y_1 \\ 5x_1-3z_1 \\ 3y_1-4x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4z_2-5y_2 \\ 5x_2-3z_2 \\ 3y_2-4x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \times k\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \\ kz_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(kz_1)-5(ky_1) \\ 5(kx_1)-3(kz_1) \\ 3(ky_1)-4(kx_1) \end{bmatrix}$$

$$= k\begin{bmatrix} 4z_1-5y_1 \\ 5x_1-3z_1 \\ 3y_1-4x_1 \end{bmatrix} = k\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \right) = k\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

であるから, $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$, $k\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \in W$. よって, W は条件 (i), (ii), (iii) を満たすので, $\mathbb{R}^3$ の部分空間である. (上の証明は, 外積に関する演算法則 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{a}\times(k\boldsymbol{x}) = k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x})$ を示すことも含んでいるので, これを既知とするなら証明はずっと短くなる.)

《別法 2》 $A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 5 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ とおけば, $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ と書ける. よって, W は同次連立一次方程式の解空間であるから部分空間となる (教科書 命題 15.4).

(2) $x = y = z = 0$ のとき $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \neq 1$ より, $\boldsymbol{0} \notin W$ となるので, W は部分空間ではない.

(3) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 0 & -2 & -2a+3 \\ 0 & 9 & a+1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 0 & -2 & -2a+3 \\ 0 & 0 & -8a+\frac{29}{2} \end{array}\right]$ より, $\boldsymbol{v} \in W$ となる a は $a = \dfrac{29}{16}$.

(4)
- $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1$ となる条件は, $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & 3 & y \\ 2 & 1 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & -x+y \\ 0 & -1 & -2x+z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & -2x+z \\ 0 & 0 & -5x+y+2z \end{array}\right]$ より, $5x - y - 2z = 0$. つまり, W_1 は平面 $5x - y - 2z = 0$ を表す. ($\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$ を用いてもよい)
- W_2 についても, 同様に $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 1 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 3 & -2x+y \\ 0 & 4 & -3x+z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & -x-y+z \\ 0 & 0 & x+4y-3z \end{array}\right]$ より, W_2 は平面 $x + 4y - 3z = 0$ を表す. ($\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4$ を用いてもよい)
- 共通部分 $W_1 \cap W_2$ は連立一次方程式 $\begin{cases} 5x - y - 2z = 0 \\ x + 4y - 3z = 0 \end{cases}$ の解全体に一致する. $\begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -21 & 13 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{11}{21} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{21} \end{bmatrix}$ から, $W_1 \cap W_2$ に属する元は, $k\begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ 21 \end{bmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$ となる. よって, $W_1 \cap W_2$ は原点を通り, 方向ベクトル $\begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ 21 \end{bmatrix}$ の直線 : $\dfrac{x}{11} = \dfrac{y}{13} = \dfrac{z}{21}$ である. $\boxed{3}$ (2) の別解と同様に, 2 つの平面 W_1, W_2 の交線は $(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \times (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4) = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ 21 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとし, 原点を通る直線と考えてもよい.
- 最後に, 和空間 $W_1 + W_2$, 和集合 $W_1 \cup W_2$ についても触れておく. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & x \\ 1 & 3 & 2 & 1 & y \\ 2 & 1 & 3 & 1 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -x+y \\ 0 & -1 & 1 & 3 & -2x+z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & -1 & 1 & 3 & -2x+z \\ 0 & 0 & 3 & 8 & -5x+y+2z \end{array}\right]$ から, $\mathbb{R}^3$ のどんなベクトルも $W_1 + W_2 = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \rangle$ に属することがわかるので, $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$. 一方, $W_1 \cup W_2$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間とならない. 実際, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3 \in W_1 \cup W_2$ であるが, $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ が平面 $W_1 : 5x - y - 2z = 0$ 上にも平面 $W_2 : x + 4y - 3z = 0$ 上にもないため, $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3 \notin W_1 \cup W_2$ となる.