2022 年度数学演習第二

演習第 4 回　微積：偏微分［1］(偏微分, 合成関数の微分)

2022 年 11 月 2 日　実施

0　概要

2 変数関数の極限・連続性 (教科書 p.80)

▶ **定義**

xy 平面上の点 (x,y) を点 (a,b) にどのように近づけても関数 $f(x,y)$ の値が l に近づくとき, l を $f(x,y)$ の $(x,y)\to(a,b)$ における極限 (値) といい, 1 変数関数のときと同様に $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$ と表す. 特に,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

であるとき, $f(x,y)$ は (a,b) で**連続**であるという.

[例]　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-2y^2}{x^2+2y^2}$ の極限を調べる.

$x=0,\ y=0$ に沿って $(0,0)$ に近づけたとき, $\displaystyle\lim_{\substack{y\to0\\x=0}} \frac{3x^2-2y^2}{x^2+2y^2} = \lim_{y\to0}\frac{-2y^2}{2y^2} = -1,\ \lim_{\substack{x\to0\\y=0}} \frac{3x^2-2y^2}{x^2+2y^2} = \lim_{x\to0}\frac{3x^2}{x^2} = 3$ となる. よって, $(0,0)$ への近づけ方によって極限が異なるので, $(x,y)\to(0,0)$ のときの極限は存在しない.

偏微分係数・偏導関数 (教科書 p.83)

▶ **定義**

点 (a,b) の近傍 D で定義された関数 $z=f(x,y)$ を考える (しばしば f と略記).

- $y=b$ と固定した 1 変数関数 $f(x,b)$ が $x=a$ で微分可能なとき, 関数 f は点 (a,b) で x に関して偏微分可能であるという. また, $f(x,b)$ の $x=a$ での微分係数を, 点 (a,b) における f の x に関する**偏微分係数**といい, $f_x(a,b)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ のように表す.
- 関数 $z=f(x,y)$ が D 上の各点 (x,y) で x に関して偏微分可能ならば, 点 (x,y) における f の x に関する偏微分係数 $f_x(x,y)$ は D 上の関数となる. これを f の x に関する**偏導関数**と呼び, f_x, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ のように書く. y に関する偏導関数 f_y, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ についても同様.
- 関数 $z=f(x,y)$ の x に関する偏導関数 f_x が存在するとき, f_x が x あるいは y に関して偏導関数可能なら, $(f_x)_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ を f_{xx}, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ のように表し, $(f_x)_y = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ を f_{xy}, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ のように表す. 同様にして f_{yx}, f_{yy} が定義される. f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} は $f=f(x,y)$ の 2 次 (2 階) の偏導関数と呼ばれ, f が $\underline{C^2\text{ 級}}$ なら $f_{xy}=f_{yx}$ が成り立つ.

[例]　$f(x,y) = x^4 - x^2y^2 + y^3 - 2xy$ に対して,

$$f_x = 4x^3 - 2xy^2 - 2y, \quad f_y = -2x^2y + 3y^2 - 2x,$$
$$f_{xx} = 12x^2 - 2y^2, \quad f_{xy} = f_{yx} = -4xy - 2, \quad f_{yy} = -2x^2 + 6y.$$

合成関数の微分 (連鎖律) (教科書 pp.86, 87)

▶ **定理** (合成関数の微分)

関数 $z=f(x,y)$ と $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$ の合成関数 $z=f(\varphi(t),\psi(t))$ に関して次が成立する:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = f_x(x,y)\varphi'(t) + f_y(x,y)\psi'(t).$$

[例]　$z = \log(x^2+2y^2+1)$ と $x = t^2,\ y = -t$ の合成関数に対して,

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{2x}{x^2+2y^2+1}\cdot 2t + \frac{4y}{x^2+2y^2+1}\cdot(-1) \\ &= \frac{2t^2}{t^4+t^2+1}\cdot 2t + \frac{-4t}{t^4+t^2+1}\cdot(-1) = \frac{4t(t^2+1)}{t^4+t^2+1}.\end{aligned}$$

▶ **定理** (合成関数の偏微分)

関数 $z = f(x,y)$ と $x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v)$ の合成関数 $z = f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ に関して次が成立する.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = f_x(x,y)\varphi_u(u,v) + f_y(x,y)\psi_u(u,v), \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = f_x(x,y)\varphi_v(u,v) + f_y(x,y)\psi_v(u,v).\end{aligned}$$

[例]　$z = e^{xy}$ と $x = -u^2v,\ y = u+v^2$ の合成関数に対して,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = ye^{xy}\cdot(-2uv) + xe^{xy}\cdot 1 \\ &= \{-u^2v - 2uv(u+v^2)\}e^{-u^2v(u+v^2)} = -uv(3u+2v^2)e^{-u^2v(u+v^2)}.\end{aligned}$$

接平面・法線 (教科書 p.89)

▶ **定理**

関数 $f(x,y)$ が (a,b) で<u>全微分可能</u>であるとき, 曲面 $S : z = f(x,y)$ の点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面が

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

で与えられる. また, ($f_x(a,b)f_y(a,b) \neq 0$ ならば) 点 $(a,b,f(a,b))$ における法線 (= 接平面に垂直な直線) は

$$\frac{x-a}{f_x(a,b)} = \frac{y-b}{f_y(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$$

で与えられる ($(f_x(a,b), f_y(a,b), -1)$ を方向ベクトルとする直線).

ヤコビアン (教科書 p.87)

▶ **定義**

関数 $z = f(x,y)$ を $x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v)$ により (u,v) の関数と見たとき, 対応する合成関数の偏微分は

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

と行列表記できる. 右辺後ろの行列は (x,y) の (u,v) に関する**ヤコビ行列**と呼ばれる. また, その行列式

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

は (x,y) の (u,v) に関する**ヤコビアン**と呼ばれ, 「重積分」において重要な役割を果たす.

[例] $x = 2u-3v+1,\ y = 3u-v+2$ に対するヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & -3 \\ 3 & -1\end{vmatrix} = 7.$$

1　演習問題

$\boxed{1}$ 次の関数 $f(x,y)$ について, 1 次と 2 次の偏導関数 $(f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy})$ を全て求めよ.

(1) $f(x,y) = e^x \cos^2 y - e^y \sin^2 x$　　(2) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$　　(3) $f(x,y) = \log_x y$

(4) $f(x,y) = \mathrm{Cos}^{-1} \dfrac{y}{x}$ $(|y| < x)$　　(5) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$

$\boxed{2}$ $f(x,y)$ に 1 変数関数 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ を合成した 1 変数関数 $g(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ の導関数 $g'(t)$ を求めよ (演習書 問題 5.2.1 (1) 他).

(1) $f(x,y) = \mathrm{Tan}^{-1} \dfrac{y}{x}$, $\varphi(t) = 2t$, $\psi(t) = 1 - t^2$

(2) $f(x,y) = \log_e(1 + x^2 + 3y^2)$, $\varphi(t) = t^2 + 1$, $\psi(t) = t^3 + 1$

$\boxed{3}$ $f(x,y)$ に 2 変数関数 $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ を合成した 2 変数関数 $g(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ の偏導関数 $g_u(u,v)$, $g_v(u,v)$ をそれぞれ求めよ.

(1) $f(x,y) = y^x$, $\varphi(u,v) = \dfrac{v}{u}$, $\psi(u,v) = u^2 + v^2$

(2) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $\varphi(u,v) = u\cos v$, $\psi(u,v) = u \sin v$

$\boxed{4}$ 次の変換のヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

(1) $x = \sin(u^2 + v)$, $y = e^{-uv^2}$　　(2) $x = \tan(uv)$, $y = u \sin v$

$\boxed{5}$ 次の曲面の与えられた点における接平面と法線の方程式を求めよ.

(1) $z = (x^3 + y^3)^{1/3}$, $(1, 2, 3^{2/3})$　　(2) $z = \tan \dfrac{\pi}{2(x^2 + y)}$, $(1, 1, 1)$

$\boxed{6}$ 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ について, 3 種類の極限値

$$\text{(a)} \ \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) \qquad \text{(b)} \ \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \qquad \text{(c)} \ \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

がそれぞれ存在するか否かを調べよ. つまり, 存在すれば, その値を計算し, そうでなければ, その理由を述べよ.

(1) $f(x,y) = \dfrac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2}$　　(2) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

(3) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$　　(4) $f(x,y) = \begin{cases} x \cos \dfrac{1}{y} & (y \neq 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases}$

2　レポート課題

問 1　$z = \cos(x^2 y)$, $x = t^2 + 1$, $y = \dfrac{1}{(t+1)^2}$ とするとき, 合成関数の微分を使って $\dfrac{dz}{dt}$ の $t = 1$ における値を求めよ.

問 2　$z = \mathrm{Tan}^{-1}(xy)$, $x = u + v$, $y = uv$ とするとき, 合成関数の微分を使って $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ の $(u, v) = (2, 1)$ における値を求めよ.

問 3　$x = e^{uv}$, $y = \log(u^2 + 1)$ とするとき, ヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ を求めよ.

問 4　$z = \mathrm{Sin}^{-1} \dfrac{x+1}{x+y}$ の点 $\left(-2, 4, -\dfrac{\pi}{6}\right)$ における法線の方程式を求めよ.