

2022年度数学演習第二 【解答例】

演習第4回 微積：偏微分 [1] (偏微分, 合成関数の微分)

2022年11月2日 実施

1 演習問題の解答

- 1 (1) $f_x(x, y) = e^x \cos^2 y - 2e^y \sin x \cos x$, $f_y(x, y) = -2e^x \sin y \cos y - e^y \sin^2 x$,
 $f_{xx}(x, y) = e^x \cos^2 y + 2e^y (\sin^2 x - \cos^2 x)$, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -2(e^x \sin y \cos y + e^y \sin x \cos x)$,
 $f_{yy}(x, y) = 2e^x (\sin^2 y - \cos^2 y) - e^y \sin^2 x$. $\sin 2x, \sin 2y, \cos 2x, \cos 2y$ を用いて表現してもよい.
- (2) $f_x(x, y) = \frac{2x+y}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}$, $f_y(x, y) = \frac{x+2y}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}$,
 $f_{xx}(x, y) = \frac{3y^2}{4(x^2+xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -\frac{3xy}{4(x^2+xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f_{yy}(x, y) = \frac{3x^2}{4(x^2+xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.
- (3) $f(x, y) = \frac{\log y}{\log x}$ より, $f_x(x, y) = -\frac{\log y}{x(\log x)^2}$, $f_y(x, y) = \frac{1}{y \log x}$, $f_{xx}(x, y) = \frac{\log y}{x^2(\log x)^2} + \frac{2 \log y}{x^2(\log x)^3} = \frac{(\log x + 2) \log y}{x^2(\log x)^3}$, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -\frac{1}{xy(\log x)^2}$, $f_{yy}(x, y) = -\frac{1}{y^2 \log x}$.
- (4) $|y| < x$ (特に $x > 0$) に注意して, $f_x(x, y) = \frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}$, $f_y(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$,
 $f_{xx}(x, y) = \frac{y(-2x^2+y^2)}{x^2(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \frac{x}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f_{yy}(x, y) = -\frac{y}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$.
- (5) $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき, $(x^2+y^2)f = x^3y - xy^3$ の両辺を x で偏微分すると, $2xf + (x^2+y^2)f_x = 3x^2y - y^3$,
 $(x^2+y^2)^2 f_x = (3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - 2x^2y(x^2-y^2)$ より, $f_x(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ が従う. 同
 様にして, $f_y(x, y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ を得る. $(x, y) = (0, 0)$ のとき, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ が
 定義から容易にわかる. 次に, 2次偏導関数を計算する. $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき, $(x^2+y^2)^2 f_x =$
 $y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)$ の両辺を x で偏微分すると, $4x(x^2+y^2)f_x + (x^2+y^2)^2 f_{xx} = 4xy(x^2+2y^2)$,
 $(x^2+y^2)^3 f_{xx} = 4xy\{(x^2+2y^2)(x^2+y^2) - (x^4+4x^2y^2-y^4)\}$ より, $f_{xx}(x, y) = \frac{4xy^3(-x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$ を
 得る. 同様にして, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3} = \frac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}$,
 $f_{yy}(x, y) = \frac{4x^3y(-3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3}$. $(0, 0)$ での値を求めるために, 上の計算結果から, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$,
 $f_x(x, 0) = 0$ ($x \neq 0$), $f_x(0, y) = -y$ ($y \neq 0$), $f_y(x, 0) = x$ ($x \neq 0$), $f_y(0, y) = 0$ ($y \neq 0$) であることに注
 意する. これらを用いて, $f_{xx}(0, 0) = 0$, $f_{xy}(0, 0) = -1$, $f_{yx}(0, 0) = 1$, $f_{yy}(0, 0) = 0$ が導かれる. よって,
 $f(x, y)$ は $((0, 0)$ を除いた領域で C^2 級であるが) $(0, 0)$ の近傍で C^2 級でない. $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ だが, 極限
 値 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_{xx}(x, y)$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_{xy}(x, y)$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_{yy}(x, y)$ はいずれも存在しない (平面の極座標を使え
 ば示せる). ここでの $f(x, y)$ はイタリアの数学者ペアノ (Giuseppe Peano, 1858–1932) による有名な
 一例である.

2 $z = f(x, y)$ と $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ の合成関数 $z = f(\varphi(t), \psi(t)) (= g(t)$ とおく) の微分に関する連鎖律

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad \text{あるいは} \quad g'(t) = f_x(x, y)\varphi'(t) + f_y(x, y)\psi'(t)$$

を適用する解答例を与える.

$$(1) f_x(x, y) = \frac{(y/x)_x}{1 + (y/x)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, f_y(x, y) = \frac{(y/x)_y}{1 + (y/x)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \varphi'(t) = 2, \psi'(t) = -2t \text{ より,}$$

$$g'(t) = -\frac{1-t^2}{(2t)^2 + (1-t^2)^2} \cdot 2 + \frac{2t}{(2t)^2 + (1-t^2)^2} \cdot (-2t) = \frac{-(2-2t^2) - 4t^2}{t^4 + 2t^2 + 1} = -\frac{2}{t^2 + 1}$$

【補足】 実は, $g(t) = \pm \frac{\pi}{2} - 2 \tan^{-1} t$ ($t \geq 0$) である. 実際, $\theta = \tan^{-1} t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ とおけば $t = \tan \theta$ であるから, 倍角の公式を用いて $\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = \frac{1}{\tan 2\theta} = \frac{1-t^2}{2t}$. よって, $t > 0$ ($\Leftrightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 2\theta < \frac{\pi}{2}$) のとき, $\tan^{-1} \frac{1-t^2}{2t} = \frac{\pi}{2} - 2\theta$. また, $t < 0$ ($\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \theta < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 2\theta < \frac{3\pi}{2}$) のとき, $\tan^{-1} \frac{1-t^2}{2t} = -\frac{\pi}{2} - 2\theta$.

$$(2) f_x(x, y) = \frac{(1+x^2+3y^2)_x}{1+x^2+3y^2} = \frac{2x}{1+x^2+3y^2}, f_y(x, y) = \frac{(1+x^2+3y^2)_y}{1+x^2+3y^2} = \frac{6y}{1+x^2+3y^2}, \varphi'(t) = 2t, \psi'(t) = 3t^2 \text{ より, } g'(t) = \frac{2(t^2+1) \cdot 2t + 6(t^3+1) \cdot 3t^2}{1+(t^2+1)^2+3(t^3+1)^2} = \frac{18t^5+4t^3+18t^2+4t}{3t^6+t^4+6t^3+2t^2+5}.$$

3 $z = f(x, y)$ と $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ の合成関数 $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) (= g(u, v)$ とおく) の微分の連鎖律

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{cases} \quad \text{あるいは} \quad \begin{cases} g_u(u, v) = f_x(x, y)\varphi_u(u, v) + f_y(x, y)\psi_u(u, v) \\ g_v(u, v) = f_x(x, y)\varphi_v(u, v) + f_y(x, y)\psi_v(u, v) \end{cases}$$

を適用する解答例を与える.

$$(1) f(x, y) = y^x = e^{x \log y} \text{ より, } f_x(x, y) = y^x \log y, f_y(x, y) = xy^{x-1}. \text{ さらに } \varphi_u(u, v) = -\frac{v}{u^2}, \varphi_v(u, v) = \frac{1}{u}, \psi_u(u, v) = 2u, \psi_v(u, v) = 2v \text{ より, } g_u(u, v) = (u^2 + v^2)^{v/u} \log(u^2 + v^2) \cdot \left(-\frac{v}{u^2}\right) + \frac{v}{u} (u^2 + v^2)^{(v/u)-1} \cdot 2u = v(u^2 + v^2)^{(v/u)-1} \left\{ -\frac{u^2 + v^2}{u^2} \log(u^2 + v^2) + 2 \right\}, g_v(u, v) = \frac{v^2}{u} (u^2 + v^2)^{(v/u)-1} \left\{ \frac{u^2 + v^2}{v^2} \log(u^2 + v^2) + 2 \right\}. \text{ ただし, } g(u, v) = (u^2 + v^2)^{v/u} \text{ を } u, v \text{ でそれぞれ偏微分することもできる.}$$

$$(2) f_x(x, y) = \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, f_y(x, y) = -\frac{4x^2y}{(x^2 + y^2)^2}, \varphi_u(u, v) = \cos v, \varphi_v(u, v) = -u \sin v, \psi_u(u, v) = \sin v, \psi_v(u, v) = u \cos v \text{ より, } g_u(u, v) = \frac{4 \cos v \sin^2 v}{u} \cos v + \frac{-4 \cos^2 v \sin v}{u} \sin v = 0 \text{ と, } g_v(u, v) = \frac{4 \cos v \sin^2 v}{u} (-u \sin v) + \frac{-4 \cos^2 v \sin v}{u} (u \cos v) = -4 \cos v \sin v \text{ を得る. ただし, } g \text{ の偏導関数を計算するだけなら } g(u, v) = \cos^2 v - \sin^2 v = \cos 2v \text{ と変形してから直接偏微分する方が簡単である.}$$

$$4 (1) \frac{\partial x}{\partial u} = 2u \cos(u^2 + v), \frac{\partial x}{\partial v} = \cos(u^2 + v), \frac{\partial y}{\partial u} = -v^2 e^{-uv^2}, \frac{\partial y}{\partial v} = -2uve^{-uv^2} \text{ より,}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 2u \cos(u^2 + v) & \cos(u^2 + v) \\ -v^2 e^{-uv^2} & -2uve^{-uv^2} \end{vmatrix} = (v^2 - 4u^2v) e^{-uv^2} \cos(u^2 + v).$$

$$(2) \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{v}{\cos^2(uv)}, \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{u}{\cos^2(uv)}, \frac{\partial y}{\partial u} = \sin v, \frac{\partial y}{\partial v} = u \cos v \text{ より,}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{v}{\cos^2(uv)} & \frac{u}{\cos^2(uv)} \\ \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = \frac{u(v \cos v - \sin v)}{\cos^2(uv)}.$$

5 (1) $f_x = \frac{x^2}{(x^3 + y^3)^{2/3}}, f_y = \frac{y^2}{(x^3 + y^3)^{2/3}}$ より, $f_x(1, 2) = 3^{-4/3}, f_y(1, 2) = 4 \cdot 3^{-4/3}$. よって, 接平面の方程式は $z - 3^{2/3} = 3^{-4/3}(x - 1) + 4 \cdot 3^{-4/3}(y - 2)$, 整理して $x + 4y - 3^{4/3}z = 0$. また, 法線の方程式は $\frac{x-1}{3^{-4/3}} = \frac{y-2}{4 \cdot 3^{-4/3}} = \frac{z-3^{2/3}}{-1}$, 整理して $x-1 = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3^{2/3}}{-3^{4/3}}$.

(2) $f_x(x, y) = \frac{-\pi x}{(x^2 + y^2)^2 \cos^2 \frac{\pi}{2(x^2 + y^2)}}, f_y(x, y) = \frac{-\pi}{2(x^2 + y^2)^2 \cos^2 \frac{\pi}{2(x^2 + y^2)}}$ より, $f_x(1, 1) = -\frac{\pi}{2}, f_y(1, 1) = -\frac{\pi}{4}$.
 よって, 接平面の方程式は $z - 1 = -\frac{\pi}{2}(x - 1) - \frac{\pi}{4}(y - 1)$, 整理して $\pi(2x + y - 3) + 4(z - 1) = 0$
 あるいは $2x + y + \frac{4}{\pi}z = 3 + \frac{4}{\pi}$. また, 求める法線の方程式は $\frac{x-1}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{y-1}{-\frac{\pi}{4}} = \frac{z-1}{-1}$, 整理して $\frac{x-1}{2\pi} = \frac{y-1}{\pi} = \frac{z-1}{4}$.

6 一般に, 3 種類の極限には論理的な関係はないので, (a) の極限または (b) の極限が存在しないことから, (c) の極限が存在しないとは言えないし, (c) の極限が存在しても, (a) の極限や (b) の極限が存在すると結論付けられない.

(1) $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1, \lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. 一方, (x, y) を x 軸に沿って原点に近づけたときの $f(x, y)$ の極限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$ と y 軸に沿って原点に近づけたときの極限 $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = -1$ が異なるので (c) の極限は存在しない.

(2) $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0$. (c) の極限を調べるには本問では平面の極座標 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ($r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) が有効で, このとき $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ は $r \rightarrow 0$ と同じことなので, あたかも (θ) をパラメータと見なして r の 1 変数関数のように扱える. 実際, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおくと, $f(x, y) = \cos \theta \sin \theta = (1/2) \sin 2\theta$ は区間 $[-1/2, 1/2]$ の任意の値を取り得るから, (c) の極限は存在しない.

(3) $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{|y|} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{|x|} = 0$. (c) の極限については (2) と同様に, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおいて, $|f(x, y)| = (r/2)|\sin 2\theta| \leq r/2 \rightarrow 0$ ($r \rightarrow 0$). よって,
 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$.

(4) $|f(x, y)| \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ から, $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$ がわかる. 一方, $x \neq 0$ とし, 例えば $y = 1/n\pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を考えると, $n \rightarrow \infty$ のとき, $y = 1/(n\pi) \rightarrow +0$ で, $f(x, 1/(n\pi)) = (-1)^n x$ なので, $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ ($x \neq 0$) は存在しない. よって, (b) の極限は存在しない.

【補足】 例えば, 1 (5) のような場面で, (a) や (b) の極限は自然に現れる. 実際, 1 (5) では

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, k)}{hk} \right) = \lim_{k \rightarrow 0} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} \right) = -1,$$

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(h, k)}{hk} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\lim_{k \rightarrow 0} \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} \right) = 1.$$

一般に, $g(tx, ty) = g(x, y)$ ($t \neq 0$), $g(1, 0) \neq g(0, 1)$ をみたす $(x, y) \neq (0, 0)$ での C^2 級関数 $g(x, y)$ を用いて, $f(x, y) = xy g(x, y)$ ($(x, y) \neq (0, 0)$), $= 0$ ($(x, y) = (0, 0)$) と定めれば, $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ が成り立つ.

2 レポート課題の解答

問1 連鎖律を用いて,

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = -2xy \sin(x^2y) \cdot 2t - x^2 \sin(x^2y) \cdot \left\{ -\frac{2}{(t+1)^3} \right\} \\ &= 2 \left\{ -2xy \cdot t + \frac{x^2}{(t+1)^3} \right\} \sin(x^2y).\end{aligned}$$

$t = 1$ のとき $(x, y) = (2, 1/4)$ であるから, 求める値は

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)_{t=1} = 2 \left(-1 + \frac{1}{2} \right) \sin 1 = \boxed{-\sin 1}.$$

問2 連鎖律を用いて,

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{y}{1+(xy)^2} \cdot 1 + \frac{x}{1+(xy)^2} \cdot u = \frac{y+xu}{1+x^2y^2}.$$

$(u, v) = (2, 1)$ のとき $(x, y) = (3, 2)$ であるから, 求める値は

$$\left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)_{(u,v)=(2,1)} = \frac{2+3 \cdot 2}{1+9 \cdot 4} = \boxed{\frac{8}{37}}.$$

問3 定義に従って計算すると,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ve^{uv} & ue^{uv} \\ \frac{2u}{u^2+1} & 0 \end{vmatrix} = \boxed{-\frac{2u^2 e^{uv}}{u^2+1}}.$$

問4 $f(x, y) = \text{Sin}^{-1} \frac{x+1}{x+y}$ とおけば, $\frac{x+1}{x+y} = 1 - \frac{y-1}{x+y}$ に注意して,

$$f_x(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+1}{x+y}\right)^2}} \cdot \frac{y-1}{(x+y)^2}, \quad f_y(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+1}{x+y}\right)^2}} \cdot \frac{-(x+1)}{(x+y)^2}.$$

これより, $f_x(-2, 4) = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f_y(-2, 4) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. よって, 曲面 $z = \text{Sin}^{-1} \frac{x+1}{x+y}$ 上の点 $(-2, 4, -\frac{\pi}{6})$ における法線の方程式は

$$\frac{x+2}{\frac{3}{2\sqrt{3}}} = \frac{y-4}{\frac{1}{2\sqrt{3}}} = \frac{z+\frac{\pi}{6}}{-1}, \quad \text{すなわち} \quad \boxed{\frac{x+2}{3} = y-4 = \frac{z+\frac{\pi}{6}}{-2\sqrt{3}}}.$$