# 数学演習第二 （演習第５回）

線形：一次独立・一次従属，基底と次元　2022 年 11 月 9 日

**要点**

**〈一次独立・一次従属〉**

- $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が**一次独立**

  $\overset{\text{定義}}{\iff}$ $c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$ を満たす $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ は $c_1 = \cdots = c_k = 0$ に限る．

  $\iff$ 同次連立一次方程式 $[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ が自明な解 $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ のみもつ．

  $\iff \operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k] = k$

- $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が**一次従属**

  $\overset{\text{定義}}{\iff}$ $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が一次独立でない．すなわち，

  $c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$ を満たす $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ は $c_1 = \cdots = c_k = 0$ 以外にも存在する．

  $\iff$ 同次連立一次方程式 $[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ が自明な解 $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ 以外にも解をもつ．

  $\iff \operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k] < k$

- $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が一次従属であるとき，$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ が存在して関係式 $c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$ が成立するが，これを**非自明な一次関係式**という．非自明な一次関係式は同次連立一次方程式 $[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ を解くことによって求められる．

**〈基底と次元〉**

- ベクトル空間 $V$ の元の組 $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ は，次の 2 つの条件を満たすとき $V$ の**基底**であるという:
  1. $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ は $V$ を生成する．すなわち，$V = \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle$.
  2. $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ は一次独立である．

- $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ が $V$ の基底

  $\iff$ 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$ を満たす実数 $c_1, \dots, c_n$ が一意的に存在する．

  が成り立つ．(「存在する」が条件 1 に，「一意的に」が条件 2 に対応する．)

- ベクトル空間 $V$ の基底の取り方は一意的ではないが，基底をなすベクトルの個数は (有限個であれば) ただ一つに決まる．この個数をベクトル空間 $V$ の**次元**といい，$\dim V$ で表す．

- $\mathbb{R}^n$ は $n$ 次元なので，基底は $n$ 個のベクトルの組からなる．$(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ が $\mathbb{R}^n$ の基底となることは，$n \times n$ 行列 $[\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ が正則行列となることと同値である（行列式の値が 0 でなければよい）．

**例 1**　$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ について考える．行基本変形を行うと，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

よって $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} = 3$ であるので $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ は一次独立．
(行列式を計算して 0 でないことを示してもよい．)

**例 2**　$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ について考える．行基本変形を行うと，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} = 2$ であるので $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ は一次従属．また $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ の解は $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ($c$ は任意定数)．よって非自明な一次関係式は $2\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$.

**例 3**　$\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x + 2y + 4z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 5x + 4y + 2z = 0 \end{matrix} \right\}$ を考える．行基本変形により，

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって $\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 5x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$ の解は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ($c$ は任意定数)．よって $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ が基底で次元は 1.

## 演習問題

**1**　［**数ベクトルの一次独立性の判定と非自明な一次関係式**］　次のベクトルの組が一次独立かどうか判定し，一次従属の場合には，非自明な一次関係式をひとつ求めよ．(各組に対して，与えられたベクトルを左から順に $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots$ とする．)

(1)　$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$

(2)　$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

(3)　$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

(4)　$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

**2** ［**一次独立性**］ ベクトル空間 $V$ に属する 4 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ が一次独立であるとする．

(1) $V$ に属する次のベクトルの組は一次独立かどうか判定せよ．一次従属の場合には，非自明な一次関係式をひとつ求めよ．

(i) $(\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{v}_1 + 7\boldsymbol{v}_2 - 3\boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{a}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 7\boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3)$

(ii) $(\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3 + 3\boldsymbol{v}_4,\ \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_4,\ \boldsymbol{a}_4 = 3\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3 + 2\boldsymbol{v}_4)$

(2) $V$ に属する次のベクトルの組が一次従属となるような定数 $k$ を求め，そのときの非自明な一次関係式をひとつ求めよ．

$$(\boldsymbol{a}_1 = 2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - 5\boldsymbol{v}_3,\quad \boldsymbol{a}_2 = -4\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 - 3\boldsymbol{v}_3,\quad \boldsymbol{a}_3 = -5\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + k\boldsymbol{v}_3)$$

**3** ［**数ベクトル空間の基底と次元**］ 次のベクトルの組のうち，$\mathbb{R}^3$ の基底になっているものをすべて答えよ．

$$\mathcal{E}_1 = \left(\begin{bmatrix}3\\5\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\4\\7\end{bmatrix}\right),\quad \mathcal{E}_2 = \left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right),\quad \mathcal{E}_3 = \left(\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right),$$

$$\mathcal{E}_4 = \left(\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right),\quad \mathcal{E}_5 = \left(\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\right),\quad \mathcal{E}_6 = \left(\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\-2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$$

**4** ［**部分空間の基底と次元**］ 次の 4 つの $\mathbb{R}^3$ の部分空間の基底と次元を求めよ．

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x + y - 4z = 0 \right\},\quad W_2 = \left\langle \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle,$$

$$W_3 = \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \\ -x - 3y + 3z = 0 \end{array} \right\},\quad W_4 = \left\{ \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{連立一次方程式} \\ \left\{\begin{array}{r} x + y + z = a \\ 2x + y + 4z = b \\ -x - 3y + 3z = c \end{array}\right. \\ \hfill \text{が解をもつ} \end{array} \right\}$$

**5** ［**部分空間の基底**］ $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\-2\\1\\4\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix}4\\-1\\3\\2\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix}5\\4\\3\\-8\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix}3\\1\\2\\0\end{bmatrix} \right\rangle$$

について，

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の間に成り立つ非自明な一次関係式をひとつ求めよ．

(2) 次のうち，$W$ の基底となっているものをすべて選べ．

$$\mathcal{E} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3),\quad \mathcal{F} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4),\quad \mathcal{G} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4),\quad \mathcal{H} = (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$$

(3) $\left( \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}4\\-1\\3\\3\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}2\\3\\1\\-4\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix}9\\-4\\7\\10\end{bmatrix} \right)$ は $W$ の基底であることを示せ．

## レポート課題

- **答だけでなく, 計算の過程も**書いて下さい. (A4 **用紙１～２枚**にまとめ, pdf ファイルに変換して提出)
- 授業に出席し, レポートを授業翌日までに **WebClass に提出**して「出席」となります.

**1** 次のベクトルの組が一次独立かどうか判定し，一次従属の場合には，非自明な一次関係式をひとつ求めよ.

(1) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$　　(2) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -11 \\ -9 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

**2** $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} 3x + y - z + 4w = 0 \\ 2x + y + 2w = 0 \end{matrix} \right\}$$

の基底と次元を求めよ.