数学演習第二（演習第５回）【解答例】

線形：一次独立・一次従属，基底と次元　(2022 年 11 月 9 日実施)

演習問題

1

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 7 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は一次従属で，非自明な一次関係式のひとつは $-7\boldsymbol{a}_1 + 4\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}$.

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 42 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ より，

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は一次従属で，非自明な一次関係式のひとつは $-\dfrac{7}{6}\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - \dfrac{1}{6}\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4 = \mathbf{0}$. 分母を払って $7\boldsymbol{a}_1 + 6\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 - 6\boldsymbol{a}_4 = \mathbf{0}$ と表せば見やすい.

(3) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & -10 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2/10 \\ 0 & 1 & 0 & 3/10 \\ 0 & 0 & 1 & 9/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は一次従属で，非自明な一次関係式のひとつは $2\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2 + 9\boldsymbol{a}_3 - 10\boldsymbol{a}_4 = \mathbf{0}$.

(4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ より，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は一次独立.　（[注意］この変形の 3 番目の行列は行列式が $\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} \neq 0$ となり，正則なので，この段階で一次独立とわかる.）

2

(1) (i) $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = c_1(\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3) + c_2(\boldsymbol{v}_1 + 7\boldsymbol{v}_2 - 3\boldsymbol{v}_3) + c_3(3\boldsymbol{v}_1 + 7\boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3) = (c_1 + c_2 + 3c_3)\boldsymbol{v}_1 + (5c_1 + 7c_2 + 7c_3)\boldsymbol{v}_2 + (-2c_1 - 3c_2 - 2c_3)\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}$.　$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は一次独立だから，$\begin{cases} c_1 + c_2 + 3c_3 = 0 \\ 5c_1 + 7c_2 + 7c_3 = 0 \\ -2c_1 - 3c_2 - 2c_3 = 0 \end{cases}$.　これは，$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 7 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$. $\boxed{1}$ (1) からこの連立一次方程式の係数行列を簡約化すると，解は $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. 従って，例えば $k = 1$ とすれば，$-7\boldsymbol{a}_1 + 4\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}$ という非自明な一次関係式が得られるので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は一次従属.

(ii) (i) と同様に，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$. $\boxed{1}$ (4) からこの連立一次方程式の係数行列を簡約化すると単位行列なので，$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. よって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は一次独立.

(2) (1) と同様に，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -5 & -3 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$. ここで，

$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -5 & -3 & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -10 & -9 \\ 0 & 12 & k+10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{10} \\ 0 & 1 & \frac{9}{10} \\ 0 & 0 & k-\frac{4}{5} \end{bmatrix}$ である．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が一次従属となるのは，この方程式が $\boldsymbol{0}$ 以外の解をもつときだから，$k = \dfrac{4}{5}$ のときである．このとき解は $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} \frac{7}{10} \\ -\frac{9}{10} \\ 1 \end{bmatrix}$ となるので，例えば $c = 10$ とすれば，$7\boldsymbol{a}_1 - 9\boldsymbol{a}_2 + 10\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ という非自明な一次関係式が得られる（$c = 1$ として $\frac{7}{10}\boldsymbol{a}_1 - \frac{9}{10}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ でも可）．$k \neq \dfrac{4}{5}$ のときは，解は $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ のみとなるので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は一次独立．

3 $\mathbb{R}^3$ は 3 次元なので，基底は 3 つのベクトルからなる．よって，$\mathcal{E}_1$ と $\mathcal{E}_6$ は基底ではない．また，$\mathcal{E}_5$ は 1 つ目と 3 つ目のベクトルが一致しているので明らかに一次従属であり，基底でない．$\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4$ に対しては，行列式が 0 でないかどうかを調べればよい．

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

より，$\mathbb{R}^3$ の基底となっているのは $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_4$ である．

4 W_1 の元は，$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}s + 2t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \dfrac{s}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(s, t \in \mathbb{R})$ と表せるので，$W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.
この 2 つの列ベクトルは明らかに一次独立であるから，W_1 の基底を与え，$\dim W_1 = 2$.

W_2 は，$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ だから，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は一次独立で，$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ という非自明な一次関係式がある．従って，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の一次結合は，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の一次結合で表せるから，$W_2 = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$. よって $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ が基底で，$\dim W_2 = 2$.

W_3 については，$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\dim W_3 = 1$ で，$\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ が基底.

W_4 は，$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 4 & b \\ -1 & -3 & 3 & c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 2 & -2a+b \\ 0 & -2 & 4 & a+c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -a+b \\ 0 & 1 & -2 & 2a-b \\ 0 & 0 & 0 & 5a-2b+c \end{bmatrix}$ より

$W_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 5a - 2b + c = 0 \right\}$ となるので，W_1 と同様に，$\dim W_4 = 2$ で，$\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}\right)$ が基底の一例.

［注意］ 一般に，$m \times n$ 行列 $A = [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n]$ に対し，$\{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つ$\} \subset \mathbb{R}^m$ は，第 7 回で見る A の列空間 $C(A) = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ に一致することが示せる．W_4 に対しては $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ となっており，これは W_3 で扱った行列と同じである．W_3 でみた簡約化の計算から，A の第 1 列と第 2 列のベクトルが $C(A)$ の基底となることがわかるので，$\dim W_4 = 2$ と基底の一例 $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$ が得られる.

5 (1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -8 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -14 & -28 & -12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は一次従属で，非自明な一次関係式 $3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ が成り立つことがわかる．

(2) (1) から，$\mathcal{E}$ は基底にならない．他方，非自明な一次関係式を使うと，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = (c_1 - 3c_3)\boldsymbol{a}_1 + (c_2 + 2c_3)\boldsymbol{a}_2 + c_4\boldsymbol{a}_4$ と書き直せるので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ は W を生成する．同様に考えると $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ はいずれも W を生成することがわかる．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ のどの 2 つ $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j$ をとっても $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_4$ は一次独立であることがチェックできるので，$\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ はいずれも W の基底である．

(3) 基底の定義に従って次の 3 つのことをチェックする．(i) $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ が一次独立．(ii) $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ が W に属する．(iii) $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ が W を生成する．

まず (i) は，$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 \\ -1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 3 & -4 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 14 & -7 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 10 & -5 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より $\operatorname{rank}[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3] = 3$ だから成立．

次に (ii) は，$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4 \mid \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 2 & 9 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & -4 & 10 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 2 & 9 \\ 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 14 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -14 & -12 & -13 & -12 & -26 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

より，$\boldsymbol{b}_1 = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4)$，$\boldsymbol{b}_2 = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_4$，$\boldsymbol{b}_3 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4$ とそれぞれ表せることからわかる．(iii) は逆に $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ が $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ の一次結合で表せることを示せばよい．これは

$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & -4 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 10 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 14 & -7 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 10 & -5 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -2 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

より，$\boldsymbol{a}_1 = -2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_3$，$\boldsymbol{a}_2 = 6\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 - 2\boldsymbol{b}_3$，$\boldsymbol{a}_4 = -2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3$ と表せることからわかる．

［**注意**］ (i) は $U = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 \rangle$ が 3 次元で $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ がその基底であることを意味する．(ii) は $U \subset W$，(iii) は $U \supset W$ を意味する．(2) で $\dim W = 3$ であることがわかっているので，**教科書命題 18.6** に注意すれば，(ii), (iii) のどちらか一方が言えれば，(i) と合わせて，$U = W$ であることが言え，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ が W の基底とわかる．

レポート問題

1 (1) 行基本変形により，$\begin{bmatrix} 2 & 12 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 12 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$．この段階で，最後の行列は正則とわかるので，$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ は一次独立である．$\begin{vmatrix} 2 & 12 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ を示してもよい．

(2) 行基本変形により，$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -11 & 3 & -1 \\ -9 & 5 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 14 & 21 \\ 0 & 14 & 21 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

よって，$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ は一次従属であり，非自明な一次関係式は $\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$.

2 行基本変形により，$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$．よって，解は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(s, t \in \mathbb{R})$ と書けるので，W は 2 次元で，基底として $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ がとれる．