数学演習第二（演習第 6 回）

微積：偏微分 [2]（多変数のテーラーの定理, 極値）

2022 年 11 月 16 日

演習第 4 回で多変数関数の偏微分について学んだ. 今回は偏微分の応用として, 2 変数関数のテーラー展開と極値について学習する.

【要点】

2 変数関数のテーラーの定理 (微積教科書 pp.94–95)

関数 $f(x,y)$ は開領域 D において C^n 級で, $(a,b)\in D$ とする.

(1) **(テーラーの定理)** (a,b) と $(a+h,b+k)$ を結ぶ線分が D に含まれるとき,

$$f(a+h,b+k)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^j f(a,b)+\frac{1}{n!}\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^n f(a+\theta h,b+\theta k)$$

となる $\theta\in(0,1)$ が存在する.

(2) **(漸近展開)**

$$f(a+h,b+k)=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^j f(a,b)+o\big((h^2+k^2)^{n/2}\big)\quad ((h,k)\to(0,0)).$$

ここで, $\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^j f$ は二項係数 $\begin{pmatrix} j\\ l\end{pmatrix}=\frac{j!}{l!(j-l)!}$ を用いて

$$\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^j f=\sum_{l=0}^{j}\begin{pmatrix} j\\ l\end{pmatrix}h^{j-l}k^l\frac{\partial^j f}{\partial x^{j-l}\partial y^l}$$

と表される.

《計算例》

1. $\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^3 f(a,b)$ を計算すると,

$$\begin{aligned}\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^3 f(a,b)&=\Big(h^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}+3h^2k\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+3hk^2\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+k^3\frac{\partial^3}{\partial y^3}\Big)f(a,b)\\ &=h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)+3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(a,b)+3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(a,b)+k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b)\\ &=f_{xxx}(a,b)h^3+3f_{xxy}(a,b)h^2k+3f_{xxy}(a,b)hk^2+f_{yyy}(a,b)k^3.\end{aligned}$$

2. $f(x,y)=xe^{x-y}$ の 3 次までのマクローリン展開 (原点でのテーラー展開) を漸近展開の形で求める.

$$f(0,0)=0,\ \ f_x(0,0)=1,\ \ f_y(0,0)=0,\ \ f_{xx}(0,0)=2,\ \ f_{xy}(0,0)=-1,\ \ f_{yy}(0,0)=0,$$
$$f_{xxx}(0,0)=3,\ \ f_{xxy}(0,0)=-2,\ \ f_{xyy}(0,0)=1,\ \ f_{yyy}(0,0)=0$$

であるから, 上の (2) を用れば ($(a,b)=(0,0)$ として計算し, (h,k) を (x,y) で置き換える),

$$xe^{x-y}=x+x^2-xy+\frac{1}{2}x^3-x^2y+\frac{1}{2}xy^2+o((x^2+y^2)^{3/2})\quad ((x,y)\to(0,0)).$$

〈別解〉 $e^X=1+X+\frac{1}{2}X^2+o(X^2)$ $(X\to 0)$ を用いて,

$$\begin{aligned}xe^{x-y}&=x\{1+(x-y)+\tfrac{1}{2}(x-y)^2+o(x^2+y^2)\}\\ &=x+x^2-xy+\tfrac{1}{2}x^3-x^2y+\tfrac{1}{2}xy^2+o((x^2+y^2)^{3/2})\quad ((x,y)\to(0,0)).\end{aligned}$$

2 変数関数の極値問題 (微積教科書 pp.95–96)

点 (a,b) の近傍で定義された関数 $z=f(x,y)$ が点 (a,b) で**極大値** $f(a,b)$ をとるとは, この点における f の値 $f(a,b)$ が, (a,b) の (十分小さな) 近傍の任意の点 (x,y) ($(x,y)\neq(a,b)$) における値より大きいことをいう. すなわち, 点 (a,b) を中心とする半径 $\varepsilon>0$ の円を D_ε とし, ε を小さくとると

$$f(a,b)>f(x,y) \quad ((x,y)\in D_\varepsilon, (x,y)\neq(a,b))$$

が成り立つことをいう (**極小値**についても同様). 極大値と極小値を総称して**極値**と呼ぶ.

(i) **極値をとるための必要条件** (極値をとる点の候補)
関数 f が C^1 級で点 (a,b) で極値をとるならば, $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ である.
(これは点 $(a,b,f(a,b))$ における曲面 $z=f(x,y)$ の接平面が xy 平面に平行であることを意味する.)

(ii) **極値の判別**
関数 f は C^2 級で, $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ であるとする. 判別式を

$$D(a,b)=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}(a,b)^2$$

で定義する.

- $D(a,b)>0$ かつ $f_{xx}(a,b)>0$ ならば, f は点 (a,b) で極小値をとる.
- $D(a,b)>0$ かつ $f_{xx}(a,b)<0$ ならば, f は点 (a,b) で極大値をとる.
- $D(a,b)<0$ ならば, f は点 (a,b) で極値をとらない.

《計算例》

1. 関数 $f(x,y)=-2x^2-xy-y^2+2x-3y$ の極値を求めよ.

[解答] f の 2 次以下の偏導関数は

$$f_x=-4x-y+2,\ \ f_y=-x-2y-3=0,\ \ f_{xx}=-4,\ \ f_{xy}=-1,\ \ f_{yy}=-2.$$

(i) $f_x=f_y=0$ の解は $(x,y)=(1,-2)$.
(ii) 点 $(1,2)$ において f が極値をとるかどうかを調べる.

$$D(1,2)=(-4)(-2)-(-1)^2=7>0, \quad f_{xx}(1,-2)=-4<0$$

であるから, f は点 $(1,-2)$ で極大値 $f(1,-2)=4$ をとる.

2. 関数 $f(x,y)=x^4+y^4-(x+y)^2$ の極値を求めよ.

[解答] f の 2 次以下の偏導関数は

$$f_x=4x^3-2(x+y), \quad f_y=4y^3-2(x+y),$$
$$f_{xx}=12x^2-2, \quad f_{xy}=-2, \quad f_{yy}=12y^2-2.$$

(i) $f_x=f_y=0$ を解く. $f_x-f_y=0$ より $4(x^3-y^3)=0$, 従って $x=y$. この事実に注意して $(x,y)=(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$ を得る.
(ii) これらの各点で f が極値をとるかどうかを調べる.
- 点 $(0,0)$ において, $D(0,0)=(-2)(-2)-(-2)^2=0$ (上の判別法は使えない). $f(x,0)=x^2(x^2-1)<0=f(0,0)$ $(0<|x|<1)$, $f(x,-x)=2x^4>0=f(0,0)$ $(x\neq0)$ であるから, $(0,0)$ では極値をとらない.
- 点 $(\pm1,\pm1)$ において, $D(\pm1,\pm1)=10\cdot10-(-2)^2=96>0$, $f_{xx}(\pm1,\pm1)=10>0$. よって, f は点 $(\pm1,\pm)$ で極小値 $f(\pm1,\pm)=-2$ をとる (複号同順).

【演習問題】

$\boxed{1}$ 次の関数 $f(x,y)$ について, 3 次の項までのマクローリン展開 (原点におけるテーラー展開) を $f(x,y) = (x, y$ の 3 次式$) + \cdots$ の形で求めよ.

(1) $f(x,y) = e^{ax} \sin by \quad (a, b \neq 0$ は定数$)$

(2) $f(x,y) = \dfrac{1}{1-x-y}$

(3) $f(x,y) = (1+y)^x \left(= e^{x \log(1+y)}\right)$

(4) $f(x,y) = a^{x+2y} \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

(5) $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{Tan}^{-1}\, y}{\cos x}$

(6) $f(x,y) = \sqrt{1 + e^{2xy}}$

$\boxed{2}$ 次の関数 $f(x,y)$ が $(0,0)$ において極値をとるかどうかを判別せよ.

(1) $f(x,y) = \cos x + \cos y + 2xy$

(2) $f(x,y) = x^2 + y^4$

(3) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

(4) $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + 2y^4$

$\boxed{3}$ 次の関数 $f(x,y)$ に対して $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ となる (x,y) をすべて求めよ. さらに, $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(1) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - x - 4y$

(2) $f(x,y) = x^4 - 2x^3 + x^2 + y^2$

(3) $f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y) \quad (0 < x, y < \pi)$

(4) $f(x,y) = \sin x \sin y \quad (0 < x, y < \pi)$

(5) $f(x,y) = y\, \mathrm{Tan}^{-1}\, x$

(6) $f(x,y) = x^5 - x^2 y + y^2$

【レポート課題】

次の (1), (2) については $\underline{3\text{ 次}}$ までのマクローリン展開 ($\boxed{1}$ と同じ形式) を求め, (3), (4) については極値を求めよ.

(1) $f(x,y) = \sqrt{1+2x^2}\, \log(1-y)$

(2) $f(x,y) = \dfrac{1}{2 - x \sin y}$

(3) $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + 6xy^2 - 9y^2$

(4) $f(x,y) = (x+y)e^{-\frac{xy}{2}}$