数学演習第二（第６回）【解答例】

微積：偏微分 [2] (テーラーの定理, 極値)　2022 年 11 月 16 日 実施

【演習問題】

1 原点 $(0,0)$ の近傍で定義された 2 変数関数 $f(x,y)$ が $(x,y)\to(0,0)$ において

$$f(x,y)=c_{00}+(c_{10}x+c_{01}y)+(c_{20}x^2+c_{11}xy+c_{02}y^2)+(c_{30}x^3+c_{21}x^2y+c_{12}xy^2+c_{03}y^3)+o((x^2+y^2)^{3/2})$$

の形に展開されるとすれば, 各項の係数は一意に定まる (漸近展開の一意性). 特に, $f(x,y)$ が C^3 級ならば, この形の展開がマクローリン展開の公式

$$\begin{aligned}f(x,y)=f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+\frac{1}{2}\Big(f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)y^2\Big)\\+\frac{1}{6}\Big(f_{xxx}(0,0)x^3+3f_{xxy}(0,0)x^2y+3f_{xyy}(0,0)xy^2+f_{yyy}(0,0)y^3\Big)+o((x^2+y^2)^{3/2})\end{aligned}\qquad(*)$$

によって与えられる. (問題文では $o((x^2+y^2)^{3/2})$ の部分を $\cdots$ で表している.) これを用いれば問題の各関数の 3 次までの展開式は必ず求まるが, 漸近展開の一意性のおかげで, 0 の近傍で C^3 級の 1 変数関数 $\varphi(t)$ に対するマクローリン展開の公式

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\varphi'(0)t+\frac{1}{2}\varphi''(0)t^2+\frac{1}{6}\varphi'''(0)t^3+o(t^3)\quad(t\to 0)$$

を利用して, より単純な計算で展開式が得られることがある. 与えられた関数はそのような場合に該当する.

(1) 2 つの 1 変数関数 e^{ax} と $\sin by$ を 3 次の項まで展開し, 掛け合わせて

$$\begin{aligned}e^{ax}\sin by&=\Big(1+ax+\frac{1}{2}a^2x^2+\frac{1}{6}a^3x^3+o(x^3)\Big)\Big(by-\frac{1}{6}b^3y^3+o(y^3)\Big)\\&=\underline{by+abxy+\frac{1}{2}a^2bx^2y-\frac{1}{6}b^3y^3}+o((x^2+y^2)^{3/2})\quad((x,y)\to(0,0)).\end{aligned}$$

〈別解〉f の 3 次までの偏導関数は以下の通り. $(0,0)$ での値を計算し, $(*)$ に代入する.

$$\begin{gathered}f_x=ae^{ax}\sin by,\ \ f_y=be^{ax}\cos by,\ \ f_{xx}=a^2e^{ax}\sin by,\ \ f_{xy}=abe^{ax}\cos by,\ \ f_{yy}=-b^2e^{ax}\sin by,\\ f_{xxx}=a^3e^{ax}\sin by,\ \ f_{xxy}=a^2be^{ax}\cos by,\ \ f_{xyy}=-ab^2e^{ax}\sin by,\ \ f_{yyy}=-b^3e^{ax}\cos by.\end{gathered}$$

(2) $\dfrac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+o(t^3)$ $(t\to 0)$ に $t=x+y$ を代入し, $|(x+y)^3|\le 2^{3/2}(x^2+y^2)^{3/2}$ に注意して,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x-y}&=1+(x+y)+(x+y)^2+(x+y)^3+o((x^2+y^2)^{3/2})\\&=\underline{1+x+y+x^2+2xy+y^2+x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}+o((x^2+y^2)^{3/2})\ \ ((x,y)\to(0,0)).\end{aligned}$$

〈別解〉f の 3 次までの偏導関数は以下の通り. $(0,0)$ での値を計算し, $(*)$ に代入する.

$$f_x=f_y=\frac{1}{(1-x-y)^2},\ \ f_{xx}=f_{xy}=f_{yy}=\frac{2}{(1-x-y)^3},\ \ f_{xxx}=f_{xxy}=f_{xyy}=f_{yyy}=\frac{6}{(1-x-y)^4}.$$

(3) $(1+y)^x=\{e^{\log(1+y)}\}^x=e^{x\log(1+y)}$ において,

$$x\log(1+y)=x\Big(y-\frac{1}{2}y^2+o(y^2)\Big)=xy-\frac{1}{2}xy^2+o((x^2+y^2)^{3/2}).$$

よって, $t=x\log(1+y)$ を $e^t=1+t+\dfrac{1}{2}t^2+o(t^2)$ $(t\to 0)$ に代入して,

$$\begin{aligned}(1+y)^x=e^{x\log(1+y)}&=1+\Big(xy-\frac{1}{2}xy^2+o((x^2+y^2)^{3/2})\Big)+o((x^2+y^2)^{3/2})\\&=\underline{1+xy-\frac{1}{2}xy^2}+o((x^2+y^2)^{3/2})\quad((x,y)\to(0,0)).\end{aligned}$$

〈別解〉f の 3 次までの偏導関数は以下の通り. $(0,0)$ での値を計算し, $(*)$ に代入する.

$$\begin{aligned}&f_x=(1+y)^x\log(1+y),\ \ f_y=x(1+y)^{x-1},\\&f_{xx}=(1+y)^x\big(\log(1+y)\big)^2,\ \ f_{xy}=(1+y)^{x-1}\big(1+x\log(1+y)\big),\ \ f_{yy}=x(x-1)(1+y)^{x-2},\\&f_{xxx}=(1+y)^x\big(\log(1+y)\big)^3,\ \ f_{xxy}=(1+y)^{x-1}\log(1+y)\big(2+x\log(1+y)\big),\\&f_{xyy}=(1+y)^{x-2}\big(2x-1+x(x-1)\log(1+y)\big),\ \ f_{yyy}=x(x-1)(x-2)(1+y)^{x-3}.\end{aligned}$$

(4) $a^{x+2y} = (e^{\log a})^{x+2y} = e^{(x+2y)\log a}$ であるから, $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)$ $(t \to 0)$ に $t = (\log a)(x+2y)$ を代入し, $|(x+2y)^3| \le 5^{3/2}(x^2+y^2)^{3/2}$ に注意して,

$$\begin{aligned} a^{x+2y} &= 1 + (\log a)(x+2y) + \frac{1}{2}(\log a)^2(x+2y)^2 + \frac{1}{6}(\log a)^3(x+2y)^3 + o((x^2+y^2)^{3/2}) \\ &= \underline{1 + (\log a)(x+2y) + (\log a)^2\Big(\frac{1}{2}x^2 + 2xy + 2y^2\Big) + (\log a)^3\Big(\frac{1}{6}x^3 + x^2y + 2xy^3 + \frac{4}{3}y^3\Big)} \\ &\quad + o((x^2+y^2)^{3/2}) \quad ((x,y) \to (0,0)). \end{aligned}$$

〈別解〉f の 3 次までの偏導関数は以下の通り. $(0,0)$ での値を計算し, $(*)$ に代入する.

$$f_x = (\log a)a^{x+2y},\ f_y = 2(\log a)a^{x+2y},\ f_{xx} = (\log a)^2a^{x+2y},\ f_{xy} = 2(\log a)^2a^{x+2y},\ f_{yy} = 4(\log a)^2a^{x+2y},$$
$$f_{xxx} = (\log a)^3a^{x+2y},\ \ f_{xxy} = 2(\log a)^3a^{x+2y},\ \ f_{xyy} = 4(\log a)^3a^{x+2y},\ \ f_{yyy} = 8(\log a)^3a^{x+2y}.$$

(5) $g(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, $h(y) = \mathrm{Tan}^{-1}\, y$ とおいて $f(x,y) = g(x)h(y)$ と書く. ここで, $\cos x = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ であるから, $\dfrac{1}{1-t} = 1 + t + \dfrac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ を用いて,

$$g(x) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - (\frac{1}{2}x^2 + o(x^3))} = 1 + \Big(\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\Big) + o(x^3) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

また, $h(y)$ については, $h'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + o(t^2)$ を $[0,\ y]$ 上で積分して,

$$h(y) = \mathrm{Tan}^{-1}\, y = \int_0^y h'(t)\, dt = y - \frac{1}{3}y^3 + o(y^3).$$

よって,

$$\frac{\mathrm{Tan}^{-1}\, y}{\cos x} = \Big(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\Big)\Big(y - \frac{1}{3}y^3 + o(y^3)\Big) = \underline{y + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{3}y^3} + o((x^2+y^2)^{3/2})\ \ ((x,y) \to (0,0)).$$

〈別解〉f の 3 次までの偏導関数は

$$f_x = g'h,\ \ f_y = gh',\ \ f_{xx} = g''h,\ \ f_{xy} = g'h',\ \ f_{yy} = gh'',$$
$$f_{xxx} = g'''h,\ \ f_{xxy} = g''h',\ \ f_{xyy} = g'h'',\ \ f_{yyy} = gh'''$$

であり, ここに現れる導関数は次の通り:

$$g'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x},\ \ g''(x) = \frac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x},\ \ g'''(x) = \frac{(5+\sin^2 x)\sin x}{\cos^4 x},$$
$$h'(y) = \frac{1}{1+y^2},\ \ h''(y) = -\frac{2y}{(1+y^2)^2},\ \ h'''(y) = -\frac{2(1-3y^2)}{(1+y^2)^3}.$$

あとは $(0,0)$ での値を計算し, $(*)$ に代入すればよい.

(6) $g(t) = \sqrt{1+e^{2t}}$ とおけば, $f(x,y) = g(xy)$ と書ける. ここで,

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)\ \ (t \to 0), \quad \sqrt{1+s} = 1 + \frac{1}{2}s - \frac{1}{8}s^2 + o(s^2)\ \ (s \to 0)$$

であるから,

$$1 + e^{2t} = 1 + (1 + 2t + 2t^2 + o(t^2)) = 2(1 + t + t^2 + o(t^2)),$$
$$\sqrt{1+e^{2t}} = \sqrt{2}\sqrt{1 + (t + t^2 + o(t^2))} = \sqrt{2}\,\Big(1 + \frac{1}{2}(t+t^2) - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2)\Big) = \sqrt{2} + \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{3t^2}{4\sqrt{2}} + o(t^2).$$

これに $t = xy$ を代入して, $\sqrt{1+e^{2xy}} = \underline{\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}xy} + o((x^2+y^2)^{3/2})$ $((x,y) \to (0,0))$.

〈別解〉f の 3 次までの偏導関数は

$$f_x = g'(xy)y,\ \ f_y = g'(xy)x,\ \ f_{xx} = g''(xy)y^2,\ \ f_{xy} = h(xy),\ \ f_{yy} = g''(xy)x^2,$$
$$f_{xxx} = g'''(xy)y^3,\ \ f_{xxy} = h'(xy)y,\ \ f_{xyy} = h'(xy)x,\ \ f_{yyy} = g'''(xy)x^3$$

と表される. ここで, $h(t) = tg''(t) + g'(t)$, $h'(t) = tg'''(t) + 2g''(t)$. 更に,

$$g'(t) = e^{2t}(1+e^{2t})^{-1/2},\ \ g''(t) = (2+e^{2t})e^{2t}(1+e^{2t})^{-3/2},\ \ g'''(t) = (4+2e^{2t}+e^{4t})e^{2t}(1+e^{2t})^{-5/2}.$$

あとは $(0,0)$ での値を計算し, $(*)$ に代入すればよい.

2 (1) $f(x,y)=\cos x+\cos y+2xy$. $f_x=2y-\sin x$, $f_y=2x-\sin y$ より, $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. $f_{xx}=-\cos x$, $f_{xy}=2$, $f_{yy}=-\cos y$ より, $D(0,0)=-3<0$. よって, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で <u>極値をとらない</u>.

(2) $f(x,y)=x^2+y^4$. $(x,y)\neq(0,0)$ で $f(x,y)>0=f(0,0)$ となるので, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で <u>極小値をとる</u>.

(3) $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$. $x\neq 0$ のとき $f(x,x)=2x^4>0=f(0,0)$ であるが, $0<|y|<\sqrt{2}$ のとき $f(0,y)=y^2(y^2-2)<0$ なので, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で <u>極値をとらない</u>.

(4) $f(x,y)=x^2-2xy^2+2y^4=(x-y^2)^2+y^4\geq 0$. 等号は $x-y^2=y=0$, すなわち $(x,y)=(0,0)$ のときのみなので, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で <u>極小値をとる</u>.

3 (1) $f(x,y)=x^2-xy+y^2-x-4y$. $\begin{cases} f_x=2x-y-1=0 \\ f_y=-x+2y-4=0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y)=\underline{(2,3)}$ (この点が極値を与える候補). $f_{xx}=2, f_{xy}=-1, f_{yy}=2$ より $D(2,3)=3>0$. よって, f は $\underline{(2,3)\text{ で極小値 } f(2,3)=-7}$ をとる.

(2) $f(x,y)=x^4-2x^3+x^2+y^2$. $\begin{cases} f_x=4x^3-6x^2+2x=2x(x-1)(2x-1)=0 \\ f_y=2y=0 \end{cases}$ より, $\underline{(x,y)=(0,0),\,(1,0),\,(1/2,0)}$ (この 3 点が極値を与える候補). $f_{xx}=12x^2-12x+2$, $f_{xy}=0$, $f_{yy}=2$ より, $D(x,y)=4(6x^2-6x+1)$. $D(0,0)=D(1,0)=4>0$, $f_{xx}(0,0)=f_{xx}(1,0)=2>0$ より, f は $\underline{(0,0),(1,0)\text{ で極小値 } f(0,0)=f(1,0)=0}$ をとる. 一方, $D(1/2,0)=-2<0$ より $f(x,y)$ は $(1/2,0)$ では極値をとらない.

(3) $f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$. $\begin{cases} f_x=\cos x-\cos(x+y)=0 \\ f_y=\cos y-\cos(x+y)=0 \end{cases}$ において 2 式の差をとり, $\cos x=\cos y$, $x,y\in(0,\pi)$ から $x=y$, よって $(x,y)=\underline{\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)}$ を得る (この点が極値を与える候補). $f_{xx}=-\sin x+\sin(x+y)$, $f_{xy}=\sin(x+y)$, $f_{yy}=-\sin y+\sin(x+y)$ なので, $D\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{9}{4}>0$, $f_{xx}\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}<0$ より $f(x,y)$ は $\underline{\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)\text{ で極大値 } f\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ をとる.

(4) $f(x,y)=\sin x\sin y$. $\begin{cases} f_x=\cos x\sin y=0 \\ f_y=\sin x\cos y=0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y)=\underline{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}$ (この点が極値を与える候補). $f_{xx}=-\sin x\sin y$, $f_{xy}=\cos x\cos y$, $f_{yy}=-\sin x\sin y$ より, $D(x,y)=\sin^2 x\sin^2 y-\cos^2 x\cos^2 y$. $D\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=1>0$, $f_{xx}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=-1<0$ より, $f(x,y)$ は $\underline{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\text{ で極大値 }\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=1}$ をとる.

(5) $f(x,y)=y\,\mathrm{Tan}^{-1}x$. $\begin{cases} f_x=\frac{y}{x^2+1}=0 \\ f_y=\mathrm{Tan}^{-1}x=0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y)=\underline{(0,0)}$ (この点が極値を与える候補). $f_{xx}=-\dfrac{2xy}{(x^2+1)^2}$, $f_{xy}=\dfrac{1}{x^2+1}$, $f_{yy}=0$ より, $D(0,0)=-1<0$. よって, $f(x,y)$ は極値をとらない.

(6) $f(x,y)=x^5-x^2y+y^2$. $\begin{cases} f_x=x(5x^3-2y)=0 \\ f_y=-x^2+2y=0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y)=\underline{(0,0),\ \left(\frac{1}{5},\frac{1}{50}\right)}$ (この 2 点が極値を与える候補). 2 次の偏導関数は $f_{xx}=20x^3-2y$, $f_{xy}=-2x$, $f_{yy}=2$.

(a) $D(0,0)=0$ より, $D(0,0)$ からは極値判定できない. $f(x,y)=\left(y-\dfrac{x^2}{2}\right)^2-x^4\left(\dfrac{1}{4}-x\right)$ と変形すれば $y=\dfrac{x^2}{2}$ 上で第 1 項が消えるので $f\left(t,\dfrac{t^2}{2}\right)=-t^4\left(\dfrac{1}{4}-t\right)<0$ $\left(0<|t|<\dfrac{1}{4}\right)$ であり, y 軸上で $f(0,y)=y^2>0$ $(y\neq 0)$ である. よって, f は $(0,0)$ で極値をとらない.

(b) $D\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{50}\right)=\dfrac{2}{25}>0$, $f_{xx}\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{50}\right)=\dfrac{3}{25}>0$ より, f は $\underline{\left(\frac{1}{5},\frac{1}{50}\right)\text{ で極小値 } f\left(\frac{1}{5},\frac{1}{50}\right)=-\frac{1}{12500}}$ をとる.

【レポート課題】

(1), (2) については $\boxed{1}$ の解答例も参照せよ．ランダウの記号で表した部分は $\cdots$ と書いてもよい．

(1) $\sqrt{1+s}$ のマクローリン展開式 $\sqrt{1+s} = 1 + (1/2)s - (1/8)s^2 + o(s^2)$ $(s \to 0)$, および $\log(1+t)$ のマクローリン展開式 $\log(1+t) = t - (1/2)t^2 + (1/3)t^3 + o(t^3)$ $(t \to 0)$ にそれぞれ $s = 2x^2$, $t = -y$ を代入して,

$$\sqrt{1+2x^2} = 1 + x^2 + o(x^3) \quad (x \to 0), \qquad \log(1-y) = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + o(y^3) \quad (y \to 0).$$

これらを掛け合わせて

$$\begin{aligned}\sqrt{1+2x^2}\,\log(1-y) &= (1 + x^2 + o(x^3))\Big(-y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + o(y^3)\Big) \\ &= \boxed{-y - \frac{1}{2}y^2 - x^2y - \frac{1}{3}y^3} + o((x^2+y^2)^{3/2}) \quad ((x,y) \to (0,0)).\end{aligned}$$

〈別解〉 f の 3 次までの偏導関数は $g(x) = \sqrt{1+2x^2}$, $h(y) = \log(1-y)$ とおいて,

$$f_x = g'h,\ f_y = gh',\ f_{xx} = g''h,\ f_{xy} = g'h',\ f_{yy} = gh'',\ f_{xxx} = g'''h,\ f_{xxy} = g''h',\ f_{xyy} = g'h'',\ f_{yyy} = gh'''$$

であり, ここで現れる導関数は次の通り:

$$g'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}},\quad g''(x) = \frac{2}{(1+2x^2)^{3/2}},\quad g'''(x) = -\frac{12x}{(1+2x^2)^{5/2}},$$
$$h'(y) = -\frac{1}{1-y},\quad h''(y) = -\frac{1}{(1-y)^2},\quad h'''(y) = -\frac{2}{(1-x)^3}.$$

あとは $(0,0)$ での値を計算し, $(*)$ に代入すればよい．

(2) $\dfrac{1}{2 - x\sin y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}x\sin y}$ において,

$$\frac{1}{2}x\sin y = \frac{1}{2}x(y + o(y^2)) = \frac{1}{2}xy + o((x^2+y^2)^{3/2}) \quad ((x,y) \to (0,0)).$$

これを $\dfrac{1}{1+t} = 1 + t + t^2 + o(t^2)$ $(t \to 0)$ の t に代入して,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2 - x\sin y} &= \frac{1}{2}\Big\{1 + \Big(\frac{1}{2}xy + o((x^2+y^2)^{3/2})\Big) + o((x^2+y^2)^{3/2})\Big\} \\ &= \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}xy} + o((x^2+y^2)^{3/2} \quad ((x,y) \to (0,0)).\end{aligned}$$

〈別解〉 f の 3 次までの偏導関数は:

$$f_x = \frac{\sin y}{(2 - x\sin y)^2},\quad f_y = \frac{x\cos y}{(2 - x\sin y)^2},\quad f_{xx} = \frac{2\sin^2 y}{(2 - x\sin y)^3},\quad f_{xy} = \frac{\cos y(2 + x\sin y)}{(2 - x\sin y)^3},$$
$$f_{yy} = -\frac{2x\sin y - x^2(1+\cos^2 y)}{(2 - x\sin y)^3},\quad f_{xxx} = \frac{6\sin^3 y}{(2 - x\sin y)^4},\quad f_{xxy} = \frac{2\sin y\cos y\,(4 + x\sin y)}{(2 - x\sin y)^4},$$
$$f_{xyy} = -\frac{4\sin y - 8x\cos^2 y - x^2\sin y\,(1+\cos^2 y)}{(2 - x\sin y)^4},\quad f_{yyy} = -\frac{x\cos y\,\{4 + 8x\sin y - x^2(5+\cos^2 y)\}}{(2 - x\sin y)^4}.$$

あとは $(0,0)$ での値を計算し, $(*)$ に代入すればよい．

(3) $\begin{cases} f_x = 6x^2 - 6x + 6y^2 = 6(x^2 - x + y^2) = 0 \\ f_y = 12xy - 18y = 6y(2x-3) = 0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y) = (0,0), (1,0)$ (この 2 点が極値を与える候補).

$f_{xx} = 12x - 6$, $f_{xy} = 12y$, $f_{yy} = 12x - 18$ より, $D = f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = 36\{(2x-1)(2x-3) - 4y^2\}$.

(a) $D(0,0) = 108 > 0$, $f_{xx}(0,0) = -6 < 0$ より, f は $\boxed{(0,0) \text{ で極大値 } f(0,0) = 0 \text{ をとる}}$.

(b) $D(1,0) = -36 < 0$ より f は $\underline{(1,0)\text{ では極値をとらない}}$.

(4) $\begin{cases} f_x = \{1 - (1/2)y(x+y)\}\,e^{-\frac{xy}{2}} = 0 \\ f_y = \{1 - (1/2)x(x+y)\}\,e^{-\frac{xy}{2}} = 0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y) = (\pm1, \pm1)$ (この 2 点が極値を与える候補).

$$f_{xx} = -\frac{1}{4}\,y\{4 - (x+y)y\}\,e^{-\frac{xy}{2}},\quad f_{xy} = -\frac{1}{4}(x+y)(4 - xy)\,e^{-\frac{xy}{2}},\quad f_{yy} = -\frac{1}{4}\,x\{4 - (x+y)x\}\,e^{-\frac{xy}{2}}$$

より, $D(\pm1,\pm1) = \Big(\mp\dfrac{1}{2\sqrt{e}}\Big)\Big(\mp\dfrac{1}{2\sqrt{e}}\Big) - \Big(\mp\dfrac{3}{2\sqrt{e}}\Big)^2 = -\dfrac{2}{e} < 0$. よって, f は $\boxed{\text{極値をとらない}}$.