数学演習第二（演習第７回）

線形：座標，行列の零空間・行空間・列空間

2022 年 11 月 30 日

【要点】

〈基底によるベクトルの座標〉 (線形教科書 p. 119–120)

$\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_r)$ がベクトル空間 V の 1 つの基底であれば，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ は $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_r$ の一次結合で 1 通りに表される．そこで,

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{b}_r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}$$

と書くとき, $\boldsymbol{v}$ と $\mathcal{B}$ から 1 通りに定まる列ベクトル $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{v}$ の基底 $\mathcal{B}$ に関する**座標**といい, $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ で表す．V が数ベクトル空間（の部分空間）の場合, 座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ を求めるには非同次連立 1 次方程式 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}$ を解けばよい.

〈行列の零空間・行空間・列空間〉 (線形教科書 p. 107,130,132)

$m \times n$ 行列 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \cdots & \boldsymbol{c}_n \end{bmatrix}$ に対して,

零空間 $N(A)$　同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体が作る $\mathbb{R}^n$ の部分空間.

行空間 $R(A)$　n 次行ベクトル $\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_m$ で生成される $\mathbb{R}_n$ の部分空間.
（ただし，$\mathbb{R}_n$ は，n 次行ベクトル全体が作るベクトル空間を表す．）

列空間 $C(A)$　m 次列ベクトル $\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_n$ で生成される $\mathbb{R}^m$ の部分空間.

- $\dim N(A) = n - \operatorname{rank} A$, $\dim R(A) = \dim C(A) = \operatorname{rank} A$ が成り立つ．(教科書 命題 19.2, 19.9)
- $R(A)$ は A を行基本変形しても変わらない (教科書 補題 19.4) ので，行基本変形して，簡約行列の上から $\operatorname{rank} A$ 個の行ベクトルを取れば $R(A)$ の基底になる.
- 行基本変形を行うと $C(A)$ は変わってしまうが，列ベクトルの間に成り立つ一次関係式は保たれるので，簡約行列の主成分を持つ列に対応する **元の** 列ベクトルを取れば $C(A)$ の基底になる．別の方法として，$R({}^tA)$ の基底を計算し，それらの転置をとってもよい.

〈共通部分と和空間に関する次元公式〉 (線形教科書 p. 134)

W_1, W_2 を V の部分空間とするとき，次の等式が成り立つ.

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

例 1　$\mathbb{R}^2$ の基底 $\mathcal{B}=\left(\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right)$ に対して，$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$ の基底 $\mathcal{B}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ を求める．

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&-1\\2&4&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

より，基本変形後の列ベクトルの間の関係式を考えると，$\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2$ が分かる．よって $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$ となる．

例 2　$A=\begin{bmatrix}1&4&7\\2&-1&5\\-2&3&-3\end{bmatrix}$ を行基本変形すると $\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$($A$ の簡約行列) となる．よって，$N(A)$ の基底の一例として $\left(\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\end{bmatrix}\right)$ がとれる．また，$R(A)$ の基底の一例は，簡約行列の主成分を持つ行を取って，$([1,\,0,\,3],\ [0,\,1,\,1])$．$C(A)$ の基底の一例は，簡約行列の主成分を持つ列に対応する元の列ベクトルを見て $\left(\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}4\\-1\\3\end{bmatrix}\right)$ がとれる．

《注》 行ベクトルでは，しばしば成分をカンマで区切って表す（特に数が成分の場合）．例えば，上では $[1\quad 0\quad 3]$ と書かずに $[1,\,0,\,3]$ と表した．

例 3　$\mathbb{R}^3$ の 2 つの部分空間

$$W_1=\left\langle \boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\rangle,\quad W_2=\left\langle \boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\rangle$$

に対して $W_1\cap W_2$ の基底を求める．行基本変形により，

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&1&0\\1&1&5&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

行基本変形によって列ベクトルの間の一次関係式や一次独立性は保たれるので，簡約行列を見て $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1$ は一次独立で，$W_1+W_2=\mathbb{R}^3$ となっていることが分かる．また，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ は一次独立で，$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ も一次独立であることが分かる (簡約行列の対応する列ベクトルを見る)．よって，$\dim W_1=\dim W_2=2$ であり，次元公式から

$$\dim(W_1\cap W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1+W_2)=2+2-3=1$$

となる．さらに，簡約行列から，非自明な一次関係式

$$\boldsymbol{a}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{0}\quad \text{すなわち}\quad 2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{b}_1+2\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{0}$$

が読み取れる．これは $2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{b}_1-2\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$ が W_1 と W_2 の両方に属していることを意味している．$\dim(W_1\cap W_2)=1$ だったので，$\left(\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}\right)$ が $W_1\cap W_2$ の基底となる．

演習問題

1 $\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\mathcal{E} = \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ と，さらに次の２つの基底を考える．

$$\mathcal{A} = \left(\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{B} = \left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

(1) $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{E}}, [\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}}, [\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{B}}$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}}$ が $\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ のとき，$\boldsymbol{v}$ の基底 $\mathcal{E}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{E}}$ および基底 $\mathcal{B}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ を求めよ．

2 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $V = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ を考えると，$\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ は V の基底である．このとき，$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -8 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}$ が V に属することを示し，基底 $\mathcal{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}}, [\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}}$ を求めよ．

3 $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2 を次のように定める：

$$W_1 = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{r} x + y - 5z - 3w = 0 \\ -2x - y + 8z - 9w = 0 \end{array} \right\}$$

(1) W_1 の基底と次元を求めよ．

(2) W_2 の基底と次元を求めよ．

(3) $W_1 + W_2$ の基底と次元を求めよ．

(4) $W_1 \cap W_2$ の基底と次元を求めよ．

4 $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2, W_3 を次のように定める．

$$W_1 = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{r} 2x + 3y + 3z - 3w = 0 \\ -x - 2y - z + w = 0 \end{array} \right\},$$

$$W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 2x + y - 4z + w = 0 \right\}$$

(1) W_2 の基底と次元を求めよ．

(2) $W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$ について，基底と次元を求めよ．

(3) $W_2 + W_3, W_2 \cap W_3$ について，基底と次元を求めよ．

$\boxed{5}$ $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -1 & -3 & -9 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ とする．

(1) A の零空間 $N(A)$, 行空間 $R(A)$, 列空間 $C(A)$ について，基底と次元を求めよ．

(2) ${}^tA$ の零空間 $N({}^tA)$, 行空間 $R({}^tA)$, 列空間 $C({}^tA)$ について，基底と次元を求めよ．

レポート課題

- **答だけでなく，計算の過程も** 書いて下さい．（A4 **用紙１～２枚**にまとめ pdf ファイルに変換して提出）
- 授業に出席し，レポートを授業翌日までに **WebClass に提出** して「出席」となります．

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}^3$ の２組の基底 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を

$$\mathcal{A} = \left(\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{B} = \left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

で定義する．ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ が $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ を満たすとき，$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ を求めよ．

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}^3$ の２つの部分空間

$$W_1 = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$$

に対して $W_1 \cap W_2$ の基底と次元を求めよ．

$\boxed{3}$ 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ の零空間 $N(A)$, 行空間 $R(A)$, 列空間 $C(A)$ について，基底と次元を求めよ．