数学演習第二（演習第７回）【解答例】

線形： 座標，行列の零空間・行空間・列空間 2022 年 11 月 30 日

演習問題

1 (1) $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3$ だから，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$. $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}}$ を求めるために $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}_1$ を解く.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{b}_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} \end{array}\right]$$

より，$\boldsymbol{b}_1 = \dfrac{1}{2}(3\boldsymbol{a}_1 - 7\boldsymbol{a}_2 + 9\boldsymbol{a}_3)$. よって，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix}$. 別法として，$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ に $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ を掛けてもよい.

(2) 条件から，$\boldsymbol{v} = p\boldsymbol{a}_1 + q\boldsymbol{a}_2 + r\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} q+r \\ -p+r \\ p-q \end{bmatrix} = [\boldsymbol{v}]_{\mathcal{E}}$. $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ を求めるために，$\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q+r \\ -p+r \\ p-q \end{bmatrix}$ を解く.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{v} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & q+r \\ 3 & 3 & 2 & -p+r \\ 5 & 4 & 2 & p-q \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & q+r \\ 0 & -3 & -7 & -p-3q-2r \\ 0 & -6 & -13 & p-6q-5r \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & q+r \\ 0 & 3 & 7 & p+3q+2r \\ 0 & 0 & 1 & 3p-r \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -9p+q+4r \\ 0 & 3 & 0 & -20p+3q+9r \\ 0 & 0 & 1 & 3p-r \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{3}p-q-2r \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{20}{3}p+q+3r \\ 0 & 0 & 1 & 3p-r \end{array}\right]$$

よって，$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{13}{3}p-q-2r \\ -\frac{20}{3}p+q+3r \\ 3p-r \end{bmatrix}$. 別法として，$\begin{bmatrix} q+r \\ -p+r \\ p-q \end{bmatrix}$ に $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -8 & 5 \\ -4 & 13 & -7 \\ 3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$ を掛けてもよい.

2 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2)$ を解く.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 4 & -7 \\ 1 & 4 & -5 & 7 \\ -2 & 1 & -8 & 13 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & -7 & 14 & -21 \\ 0 & 9 & -18 & 27 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

ここから，$\boldsymbol{b}_1 = 3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2$ と $\boldsymbol{b}_2 = -5\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2$ が分かる. 従って，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の一次結合で表せるので V に属する. さらに，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $[\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

3 (1) $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 14 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 11 & 22 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\dim W_2 = 2$ で，基底の一例は $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

(2) 行基本変形により，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 & -3 \\ -2 & -1 & 8 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 12 \\ 0 & 1 & -2 & -15 \end{bmatrix}.$$

よって，$\dim W_2 = 2$ で，基底の一例は $\left(\begin{bmatrix}3\\2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-12\\15\\0\\1\end{bmatrix}\right)$．これを $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ とおく．

(3) W_1 の基底と W_2 の基底を並べた行列 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2\end{bmatrix}$ に行基本変形を施すと，

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -12\\ -5 & -3 & 2 & 15\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ -5 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -12\\ 0 & 7 & 17 & -45\\ 0 & 2 & 4 & -12\\ 0 & 11 & 15 & -59\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -12\\ 0 & 1 & 2 & -6\\ 0 & 7 & 17 & -45\\ 0 & 11 & 15 & -59\end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -6\\ 0 & 0 & 3 & -3\\ 0 & 0 & -7 & 7\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -6\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

となり，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1$ は一次独立で，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ は一次従属．簡約行列から非自明な一次関係式 $\boldsymbol{a}_1 + 4\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$ が読み取れ，$\boldsymbol{b}_2$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1$ の一次結合で書けるから，$W_1 + W_2 = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1 \rangle$ となる．よって，$\dim(W_1 + W_2) = 3$ で，基底の一例は $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1) = \left(\begin{bmatrix}1\\-5\\-1\\-5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-3\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\\1\\0\end{bmatrix}\right)$．

(4) 次元公式より，$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) = 1$ であり，非自明な一次関係式 $\boldsymbol{a}_1 + 4\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$ より，

$$\boldsymbol{a}_1 + 4\boldsymbol{a}_2 = -\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}9\\-17\\-1\\-1\end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2.$$

よって，$W_1 \cap W_2$ の基底の一例は $\left(\begin{bmatrix}9\\-17\\-1\\-1\end{bmatrix}\right)$．

$\boxed{4}$ (1) $\begin{bmatrix}2 & 3 & 3 & -3\\ -1 & -2 & -1 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ より，$\dim W_2 = 2$ で，基底の一例は $\left(\begin{bmatrix}-3\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$．これを $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ とおく．

(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は一次独立であることがチェックできるので，$\dim W_1 = 2$ であり，

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1 & -3 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -1 & -3 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 4 & -3\\ 0 & 2 & 6 & -5\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 4 & -3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

より，$\dim(W_1 + W_2) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2\end{bmatrix} = 3$．基底の一例は $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)$．共通部分と和の次元公式から，$\dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 2 - 3 = 1$．上の簡約行列から，$-2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{b}_1 + 4\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$ という非自明な一次関係式が読み取れる．これは $2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 = 3\boldsymbol{b}_1 + 4\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}3\\-1\\3\\4\end{bmatrix}$ を意味する．左辺は W_1 に，中辺は W_2 に属するから，この元は共通部分 $W_1 \cap W_2$ に属する．$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ だから，$\left(\begin{bmatrix}3\\-1\\3\\4\end{bmatrix}\right)$ が $W_1 \cap W_2$ の基底．

［注意］$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix}c_1 - c_2\\ c_2\\ c_1 - c_2\\ 2c_1\end{bmatrix}$ を W_2 の条件にある連立 1 次方程式に代入して，c_1, c_2 の満たす条件を求める方法でもできる．

(3) $\dim W_2=2,\ \dim W_3=3$．さらに，

$$W_2\cap W_3=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4\ \middle|\ \begin{matrix}2x+3y+3z-3w=0\\-x-2y-z+w=0\\2x+y-4z+w=0\end{matrix}\right\}$$

だから，$\begin{bmatrix}2&3&3&-3\\-1&-2&-1&1\\2&1&-4&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&-1\\0&-1&1&-1\\0&-3&-6&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&-3\\0&1&-1&1\\0&0&-3&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&\frac{1}{3}\\0&0&1&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$ より，

$\dim(W_2\cap W_3)=1$ で，基底の一例は $\left(\begin{bmatrix}3\\-1\\2\\3\end{bmatrix}\right)$．$\dim W_2=2,\ \dim W_3=3$ より，共通部分と和に関する次元公式から，$\dim(W_2+W_3)=2+3-1=4$．$\dim\mathbb{R}^4=4$ だから，$W_2+W_3=\mathbb{R}^4$． ［注意］ W_3 の基底を求めて (1), (2) と同じ方法で考えてもよい．

5 (1) 行列 A の零空間，行空間，列空間の基底は A の簡約行列をもとに考える．零空間 $N(A)$ の次元は (A の列数) $-\operatorname{rank}A$ であり，基底は同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の基本解を選べばよい．$\dim C(A)=\operatorname{rank}A$ であり，列空間の基底は簡約行列の主成分に対応する元の行列 A の列を取ればよい．$\dim R(A)=\operatorname{rank}A$ であり，行基本変形で行空間は変わらないので，簡約行列の 1 行目から $\operatorname{rank}A$ 行目までを取ればよい．

$$A=\begin{bmatrix}3&-5&-1&-3&-9\\1&0&3&1&2\\2&-1&4&1&1\\1&-1&1&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&-1\\0&-2&-4&0&-6\\0&1&2&2&3\\0&1&2&3&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&-1&2\\0&1&2&0&3\\0&0&0&2&0\\0&0&0&3&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&2&0&3\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

より，$\dim N(A)=2$ で基底の一例は，$\left(\begin{bmatrix}-3\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-3\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$．$\dim C(A)=\operatorname{rank}A=3$ で，簡約行列の主成分が第 $1,2,4$ 列にあることから，基底の一例は A の第 $1,2,4$ 列 $\left(\begin{bmatrix}3\\1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\0\\-1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\1\\1\\-1\end{bmatrix}\right)$．また，$\dim R(A)=\operatorname{rank}A=3$ で，基底の一例は，([1, 0, 3, 0, 2], [0, 1, 2, 0, 3], [0, 0, 0, 1, 0]).

(2) $${}^tA=\begin{bmatrix}3&1&2&1\\-5&0&-1&-1\\-1&3&4&1\\-3&1&1&-1\\-9&2&1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-3&-4&-1\\0&10&14&4\\0&-15&-21&-6\\0&-8&-11&-4\\0&-25&-35&-10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1/5&1/5\\0&1&7/5&2/5\\0&0&0&0\\0&0&1/5&-4/5\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&6\\0&0&1&-4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$ より，$\dim N({}^tA)=1$ で，基底の一例は $\left(\begin{bmatrix}-1\\-6\\4\\1\end{bmatrix}\right)$．$\dim C({}^tA)=\operatorname{rank}{}^tA=3$ で，簡約行列の主成分が第 $1,2,3$ 列にあることから，基底の一例は ${}^tA$ の第 $1,2,3$ 列 $\left(\begin{bmatrix}3\\-5\\-1\\-3\\-9\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\3\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\\4\\1\\1\end{bmatrix}\right)$．また，$\dim R({}^tA)=\operatorname{rank}{}^tA=3$ で，基底の一例は ([1, 0, 0, 1], [0, 1, 0, 6], [0, 0, 1, −4]).

［注意］ $R({}^tA)$ の基底は $C(A)$ の基底の転置，$C({}^tA)$ の基底は $R(A)$ の基底の転置をとってもよい．

レポート課題

$\boxed{1}$ $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ であり，行基本変形により，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 & \big| & \boldsymbol{v} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 9 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & -6 & -7 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -27 & -25 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 29 & 29 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

となるから，$\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3$．よって，$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{2}$ $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix}$ を行基本変形すると，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

演習の例 3 と同様にして，$\dim W_1 = \dim W_2 = 2$, $\dim(W_1 + W_2) = 3$ ($(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2)$ が基底になる) が分かる．よって，次元公式により $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) = 1$．また，簡約行列から非自明な関係式 $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{0}$ が読み取れる．従って，$\boldsymbol{b}_1 = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2$ となり，$W_1 \cap W_2$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ がとれる．

[別解] $\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$ とすれば，$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = d_1\boldsymbol{b}_1 + d_2\boldsymbol{b}_2$ と書ける．このとき，

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = d_1\boldsymbol{b}_1 + d_2\boldsymbol{b}_2 \iff \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -d_1 \\ -d_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \overset{\text{上で行った}}{\underset{\text{行基本変形}}{\iff}} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -d_1 \\ -d_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数})$$

であるから, 任意の $\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$ は $\boldsymbol{x} = t(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2) = -t\boldsymbol{b}_1$ と書ける．よって, $W_1 \cap W_2 = \langle \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{b}_1 \rangle$ が成り立ち, $W_1 \cap W_2$ の 1 つの基底は $(\boldsymbol{b}_1)$, 次元は $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ である (次元公式は用いなくてよい).

$\boxed{3}$ 行基本変形により，

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって，$\operatorname{rank} A = 3$ だから $\dim N(A) = 1$, $\dim R(A) = 3$, $\dim C(A) = 3$ である．簡約行列より，$N(A)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ がとれる．また，$R(A)$ の基底の一例は，簡約行列の行ベクトルを上から 3 個取って，$([1,\ 0,\ 0,\ 0],\ [0,\ 1,\ 0,\ 1],\ [0,\ 0,\ 1,\ -1])$．$C(A)$ の基底の一例は，主成分を持つ列ベクトルに対応する元の列ベクトル (A の第 $1, 2, 3$ 列) を取って，$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$.