数学演習第二 演習第８回　微積：偏微分 [3]
（陰関数・ラグランジュの未定乗数法）

2022 年 12 月 14 日 実施

- **授業中の課題** は **1**, **2**, **3** の 10 問です. **レポート課題** は **4**, **5** の 2 問です.
- 要点もよく読むこと.

【要点】

[1] 陰関数　$f(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ 全体で定義された 2 変数の C^1 級関数 (例えば 2 変数多項式) であるとする. (x,y) が $f(x,y)=0$ によって関係づけられているとき，局所的には y が x の関数と見なされる場合が多い. つまり，ある点 a を含む開区間 $(a-r,a+r)$ で定義された 1 変数の連続関数 $y=\varphi(x)$ が存在して

$$f(x,\varphi(x))=0 \qquad (a-r<x<a+r)$$

をみたすとき，$y=\varphi(x)$ を $f(x,y)=0$ で定義される**陰関数** (implicit function) という. 例えば，$f(x,y)=x^4+y^2-2=0$ の場合を考えてみよう. この場合，$y=\varphi(x)=\pm\sqrt{2-x^4}$ である. このように，曲線 $f(x,y)=0$ は 1 つであるが，陰関数は複数あることがよくある. しかし，点 $(1,1)$ の近くの陰関数は $y=\sqrt{2-x^4}$ だけで，点 $(1,-1)$ の近くの陰関数も $y=-\sqrt{2-x^4}$ だけである. また，$y=\pm\sqrt{2-x^4}$ は閉区間 $[-\sqrt[4]{2},\sqrt[4]{2}]$ で定義され，連続であるが，$x=\pm\sqrt[4]{2}$ で微分可能でない. しかし，開区間 $(-\sqrt[4]{2},\sqrt[4]{2})$ では C^∞ 級である. 同様に，ある点 b を含む開区間 $(b-r,b+r)$ で定義された 1 変数の連続関数 $x=\psi(y)$ が存在して

$$f(\psi(y),y)=0 \qquad (b-r<y<b+r)$$

をみたすとき，$x=\psi(y)$ も $f(x,y)=0$ で定義される**陰関数**という. 先程の $f(x,y)=x^4+y^2-2=0$ の場合には，$x=\psi(y)=\pm\sqrt[4]{2-y^2}$ である. やはり，点 $(1,-1)$ の近くの陰関数は $x=\sqrt[4]{2-y^2}$ だけで，点 $(-1,-1)$ の近くの陰関数も $x=-\sqrt[4]{2-y^2}$ だけである. また，$x=\pm\sqrt[4]{2-y^2}$ は閉区間 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ で定義され，連続であるが，$x=\pm\sqrt{2}$ で微分可能でない. しかし，開区間 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ では C^∞ 級である.（この後，陰関数の 2 次までの導関数が用いられることを考慮に入れて）論理的には，陰関数 $y=\varphi(x)=\pm\sqrt{2-x^4}$, $x=\psi(y)=\pm\sqrt[4]{2-y^2}$ のどちらを選んでもよいが，計算上は，導関数 $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ と導関数 $\psi'(y)$, $\psi''(y)$ のうち，より扱い易いものを選ぶべきであろう. この意味で前者を選択するのは自然ではないか. また，応用上，実際に必要になるのは陰関数の導関数よりも，(a,b) を $f(x,y)=0$ 上の点として，微分係数 $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$ または $\psi'(b)$, $\psi''(b)$ の値であるから，$\varphi(x)$ も $\psi(y)$ も具体的な式で表される必要性はない. であるからこそ，$f(x,y)$ が多少，複雑な関数でも困ることはない. 以下で説明するように，$\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$ も $\psi'(b)$, $\psi''(b)$ も $f(x,y)$ の偏導関数と 2 次の偏導関数の (a,b) における値から計算することができる. よって，$f(x,y)$ の偏導関数と 2 次の偏導関数が計算できればよい.

微積の教科書の定理 4.4.1 (陰関数の存在定理) は，$f(x,y)$ が領域 (連結開集合) D において C^1 級で，かつある点 $(a,b)\in D$ に対して $f(a,b)=0$, $f_y(a,b)\neq 0$ であれば，$f(x,y)=0$ の C^1 級の陰関数 $y=\varphi(x)$ が点 (a,b) の近くで存在することを主張している ($b=\varphi(a)$ に注意)．このとき $f(x,\varphi(x))=0$ の両辺を x で微分すると，合成関数の微分に関する連鎖律 (定理 4.2.4) から

$$0=\frac{d}{dx}f(x,\varphi(x))=f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) \tag{i}$$

が成り立つ．ここで，$f_y(x,y)$ は (a,b) で連続なので，点 (a,b) の近くで $f_y(x,y)\neq 0$ に注意すると

$$\varphi'(x)=-\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))},\ \text{あるいは，}\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} \tag{ii}$$

と表される．更に，$f(x,y)$ が C^2 級であれば，(ii) の $\varphi'(x)$ の右辺は C^1 級，従って $\varphi(x)$ は C^2 級であるから，(i) の両辺を x で微分し，$f_{xy}=f_{yx}$ に注意して，(ii) を代入すると，点 (a,b) の近くで

$$\begin{aligned}
0&=\frac{d^2}{dx^2}f(x,\varphi(x))=\frac{d}{dx}f_x(x,\varphi(x))+\frac{d}{dx}\{f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)\}\\
&=f_{xx}(x,\varphi)+f_{xy}(x,\varphi)\varphi'+f_{yx}(x,\varphi)\varphi'+f_{yy}(x,\varphi)(\varphi')^2+f_y(x,\varphi)\varphi''\\
&=\frac{f_{xx}\,(f_y)^2-2\,f_{xy}\,f_x\,f_y+f_{yy}\,(f_x)^2}{(f_y)^2}+f_y\,\varphi''
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \varphi''(x)=-\frac{f_{xx}\,(f_y)^2-2\,f_{xy}\,f_x\,f_y+f_{yy}\,(f_x)^2}{(f_y)^3} \tag{iii}$$

が得られる．ただし，この公式を覚える必要はなく，この導出法を習得すべきである．同様に帰納法により，$f(x,y)$ が C^n 級ならば，陰関数 $\varphi(x)$ も C^n 級であることもわかる．特に，陰関数 $\varphi(x)$ が点 $x=a$ で極値をとれば，$\varphi'(a)=0$ なので，(ii), (iii) から，$\varphi''(a)=-\dfrac{f_{xx}(a,\varphi(a))}{f_y(a,\varphi(a))}=-\dfrac{f_{xx}(a,b)}{f_y(a,b)}$ を記憶しておくと便利である．

例 1　$f(x,y)=x^2y-xy^2+2=0$ で定まる陰関数 $y=\varphi(x)$ を考える．

(1) 曲線 $f(x,y)=0$ 上の点 $(1,-1)$ における接線と法線の方程式を求める．

(2) 陰関数 $y=\varphi(x)$ の極値を求める．

解答例　(1) $x^2y-xy^2+2=0$ $(y=\varphi(x))$ の両辺を x で微分すると

$$2xy+x^2y'-y^2-2xyy'=0 \qquad \therefore\ \varphi'(x)=y'=\frac{y(y-2x)}{x(x-2y)}$$

を得る．特に，$\varphi'(1)=\dfrac{(-1)(-3)}{1+2}=1$ より，求める接線と法線の方程式はそれぞれ

$$y-(-1)=\varphi'(1)(x-1) \qquad \therefore\ y=x-2$$

$$y-(-1)=-\frac{1}{\varphi'(1)}(x-1) \qquad \therefore\ y=-x$$

(2) $b=\varphi(a)$ とおく．$\varphi(x)$ が点 $x=a$ で極値をとれば，$\varphi'(a)=0$ なので，(1) から，$b=0$ または $b=2a$ をみたす．しかし，$f(a,0)=2\neq 0$ なので，$b=0$ は不適である．そこで，$0=f(a,2a)=2(1-a^3)$ より，$a=1$ がわかる．よって，$\varphi''(1)=-\dfrac{f_{xx}(1,2)}{f_y(1,2)}=\dfrac{4}{3}>0$ から，$\varphi(x)$ は点 $x=1$ で極小値 2 をとる．■

[2] <u>２変数関数のラグランジュの未定乗数法 (定理 4.4.2)</u>　D を $\mathbb{R}^2$ の領域（連結開集合）とし，$f(x,y)$, $g(x,y)$ は D で定義され，C^1 級であるとする．また，$(x,y,\lambda) \in D \times \mathbb{R}$ に対して，３変数関数

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y)$$

を定める．条件 $g(x,y) = 0$ の下で，$f(x,y)$ がある点 (a,b) で極値をとるとき，$g_x(a,b) \neq 0$ または $g_y(a,b) \neq 0$ であれば，ある実数 α が存在して

$$F_x(a,b,\alpha) = 0,\ \ F_y(a,b,\alpha) = 0,\ \ F_\lambda(a,b,\alpha) = 0$$

が成り立つ．この λ をラグランジュ乗数 (Lagrange multiplier) ということがある．

<u>例２</u>　条件 $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ の下で，関数 $f(x,y) = x + y$ の極値を求める．

<u>解答例</u>　(1)　最初に，$f(x,y)$ が極値をとる可能性がある点 (a,b) の候補をラグランジュの未定乗数法で求める．つまり，条件 $g(x,y) = 0$ の下で，$f(x,y)$ がある点 (a,b) で極値をとると仮定する．そのとき，$a^2 + b^2 = 2$ から，$g_x(a,b) = 2a \neq 0$ または $g_y(a,b) = 2b \neq 0$ をみたすので，ラグランジュの未定乗数法により，ある実数 α が存在して

$$0 = F_x(a,b,\alpha) = 1 - 2\alpha a,\ \ 0 = F_y(a,b,\alpha) = 1 - 2\alpha b,\ \ 0 = -F_\lambda(a,b,\alpha) = g(a,b) = a^2 + b^2 - 2$$

が成り立つ．ここで，$0 = F_y(a,b,\alpha) - F_x(a,b,\alpha) = 2\alpha(a-b)$ であるが，$\alpha \neq 0$ より，$a = b$ がわかる．そして，$0 = g(a,a) = 2(a^2 - 1)$ から，$(a,b) = (1,1), (-1,-1)$ を得る．

(2)　$K = \{(x,y) \mid g(x,y) = 0\}$ は有界かつ閉集合なので，『理工系 基礎数学演習』の例題 5.9 の $\boxed{\text{注意}}$ に記されている，ワイエルシュトラスの定理「有界かつ閉集合における連続関数は最大値と最小値をもつ」を用いれば，$f(1,1) = 2 > -2 = f(-1,-1)$ から，$f(1,1) = 2$ は極大値かつ最大値で，$f(-1,-1) = -2$ は極小値かつ最小値であることを知る．しかし，ここでは K が有界でない場合にも対応できるようにワイエルシュトラスの定理を使わないで，$g(x,y) = 0$ の陰関数を利用して直接，極値の判定を実行する．

そこで，例えば点 $(1,1)$ の近傍 $D_r(1,1) = \{(x,y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 < r^2\}$ で，$g(x,y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ をとり，$f(x,y)$ を１変数化した関数 $h(x) = f(x,\varphi(x)) = x + \varphi(x)$ を考える．そのとき，$f(x,y) = h(x)$ $((x,y) \in D_r(1,1))$ をみたすから，$h''(1)$ の符号を調べればよい．そこで，$h'(x) = 1 + \varphi'(x)$, $h''(x) = \varphi''(x)$ なので，$g(x,\varphi(x)) = 0$ の両辺を x で (２回) 微分することで，$\varphi''(1)$ が計算される．これが以下の方針である．

$$0 = \frac{d}{dx} g(x,\varphi(x)) = \frac{d}{dx}\{x^2 + \varphi(x)^2 - 2\} = 2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) \quad \therefore \varphi'(1) = -\frac{1}{\varphi(1)} = -1$$

ここで，当然ながら，$h'(1) = 0$ をみたしている．更に，x で微分すると

$$0 = \frac{d^2}{dx^2} g(x,\varphi(x)) = 2 + 2\{\varphi'(x)\}^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) \quad \therefore \varphi''(1) = -\frac{1 + \{\varphi'(1)\}^2}{\varphi(1)} = -2$$

を得る．よって，$h''(1) = \varphi''(1) = -2 < 0$ なので，$h(x)$ は $x = 1$ で極大値 $h(1) = 2$ をとる．つまり，$f(x,y)$ は点 $(1,1)$ で極大値 $f(1,1) = h(1) = 2$ をとる．点 $(-1,-1)$ でも全く同様にして，$f(x,y)$ は点 $(-1,-1)$ で極小値 $f(-1,-1) = -2$ をとることがわかる．■

<u>注意</u>　上の例の $f(x,y)$, $g(x,y)$ は簡単な関数であったため，代数的な解法や媒介変数表示による解法なども適用できる．例えば，$g(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ のとき，$f(x,y)^2 = (x+y)^2 = 2xy + 2 \leqq x^2 + y^2 + 2 = 4$ より，$f(1,1) = 2$ が極大値かつ最大値で，$f(-1,-1) = -2$ が極小値かつ最小値であることは容易にわかる．また，$x = \sqrt{2}\cos\theta$, $y = \sqrt{2}\sin\theta$ とおくと，$x^2 + y^2 - 2 = 0$ をみたすので，$f(x,y) = \sqrt{2}\,(\sin\theta + \cos\theta) = 2\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ からも同じ結論を得る．しかしながら，これらの方法は簡単な $f(x,y)$, $g(x,y)$ にしか有効でないため，全く推奨できない．

【授業中の課題（残りは宿題）：演習問題】

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の２変数関数 $f(x,y)$ に対して，$f(x,y)=0$ で定まる陰関数 $y=\varphi(x)$ について，$\varphi'(x)$ を x, y の式で表せ．また，曲線 $f(x,y)=0$ 上の指定された点における接線と法線の方程式を求めよ．更に，$\varphi'(a)=0$ となる a について，$\varphi''(a)$ を a の式で表せ．
（a の具体的な値は $\boxed{\mathbf{2}}$ で求める．例１の直前の記述を参照せよ．）

(1)　$f(x,y)=2x^2+xy+y^2-2x+3y-10$　　$(0,-5)$

(2)　$f(x,y)=x^3+y^3-3xy-3$　　$(\sqrt[3]{3},0)$

(3)　$f(x,y)=2x^3-x^2y+y^2$　　$(-1,-1)$

(4)　$f(x,y)=x^4-2x^2y+y^3$　$(1,1)$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\boxed{\mathbf{1}}$ のそれぞれの陰関数 $y=\varphi(x)$ について，極値が存在すれば，それらをすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (演習書 問題 5.2.13)　次の条件 $g(x,y)=0$ の下で，関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(6)　$g(x,y)=x^2+y^2-2$,　$f(x,y)=x^3+y^3$

(7)　$g(x,y)=x^2-y^2+1$,　$f(x,y)=2x+y^3$

【レポート課題：オンライン提出】

- **答だけでなく, 計算の過程も**書いて下さい.
  (A4 **用紙１〜２枚**にまとめ, pdf ファイルに変換して提出)
- 授業に出席し, レポートを授業翌日までに **WebClass に提出** して「出席」となります.

$\boxed{\mathbf{4}}$ $f(x,y)=2x^3-3x^2+y^2-3=0$ で定まる陰関数 $y=\varphi(x)$ の極値をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 条件 $g(x,y)=x^2-xy+y^2-y=0$ の下で，関数 $f(x,y)=x-y$ の極値を求めよ．