数学演習第二 演習第８回　微積：偏微分 [3] （陰関数・ラグランジュの未定乗数法）　解答例

2022 年 12 月 14 日 実施分

【演習問題の解答例】

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x,y)=2x^2+xy+y^2-2x+3y-10=0$ $(y=\varphi(x))$ の両辺を x で微分すると

$$4x+y+xy'+2yy'-2+3y'=0 \qquad \therefore\ \varphi'(x)=y'=-\frac{4x+y-2}{x+2y+3} \tag{$*$}$$

を得る．特に，$\varphi'(0)=-\dfrac{-5-2}{-10+3}=-1$ より，求める接線と法線の方程式はそれぞれ

$$y-(-5)=\varphi'(0)x \qquad \therefore\ y=-x-5$$
$$y-(-5)=-\frac{1}{\varphi'(0)}x \qquad \therefore\ y=x-5$$

次に，$b=\varphi(a)$ とおく．$\varphi(x)$ が点 $x=a$ で極値をとれば，$\varphi'(a)=0$ なので，$(*)$ から，$b=2-4a$ をみたす．よって，$a\neq 1$ のとき，$\varphi''(a)=-\dfrac{f_{xx}(a,2-4a)}{f_y(a,2-4a)}=-\dfrac{4}{a+2(2-4a)+3}=\dfrac{4}{7(a-1)}$ を得る．

(2) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy-3=0$ $(y=\varphi(x))$ の両辺を x で微分すると

$$3x^2+3y^2y'-3y-3xy'=0 \qquad \therefore\ \varphi'(x)=y'=\frac{x^2-y}{x-y^2} \tag{$*$}$$

を得る．特に，$\varphi'(\sqrt[3]{3}\,)=\dfrac{(\sqrt[3]{3}\,)^2}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{3}$ より，求める接線と法線の方程式はそれぞれ

$$y=\varphi'(\sqrt[3]{3}\,)(x-\sqrt[3]{3}\,)=\sqrt[3]{3}\,x-\sqrt[3]{9},\quad y=-\frac{1}{\varphi'(\sqrt[3]{3}\,)}(x-\sqrt[3]{3}\,)=-\frac{x}{\sqrt[3]{3}}+1$$

次に，$b=\varphi(a)$ とおく．$\varphi(x)$ が点 $x=a$ で極値をとれば，$\varphi'(a)=0$ なので，$(*)$ から，$b=a^2$ をみたす．よって，$a\neq 0,1$ のとき，$\varphi''(a)=-\dfrac{f_{xx}(a,a^2)}{f_y(a,a^2)}=-\dfrac{6a}{3(a^2)^2-3a}=\dfrac{2}{1-a^3}$ を得る．

(3) $f(x,y)=2x^3-x^2y+y^2=0$ $(y=\varphi(x))$ の両辺を x で微分すると

$$6x^2-2xy-x^2y'+2yy'=0 \qquad \therefore\ \varphi'(x)=y'=\frac{2x(3x-y)}{x^2-2y} \tag{$*$}$$

を得る．特に，$\varphi'(-1)=\dfrac{(-2)(-2)}{1+2}=\dfrac{4}{3}$ より，求める接線と法線の方程式はそれぞれ

$$y-(-1)=\varphi'(-1)(x+1) \qquad \therefore\ y=\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$$
$$y-(-1)=-\frac{1}{\varphi'(-1)}(x+1) \qquad \therefore\ y=-\frac{3}{4}x-\frac{7}{4}$$

次に，$b=\varphi(a)$ とおく．$\varphi(x)$ が点 $x=a$ で極値をとれば，$\varphi'(a)=0$ なので，$(*)$ から，$a=0$ または $b=3a$ をみたす．ここで，$a=0$ のとき，$b=0$ より，$\varphi'(0)$ は存在しない．よって，$a\neq 0,6$ のとき，$\varphi''(a)=-\dfrac{f_{xx}(a,3a)}{f_y(a,3a)}=-\dfrac{12a-2(3a)}{-a^2+2(3a)}=\dfrac{6}{a-6}$ を得る．

(4) $f(x,y)=x^4-2x^2y+y^3=0$ $(y=\varphi(x))$ の両辺を x で微分すると

$$4x^3-4xy-2x^2y'+3y^2y'=0 \qquad \therefore\ \varphi'(x)=y'=\frac{4x(x^2-y)}{2x^2-3y^2} \tag{$*$}$$

を得る．特に，$\varphi'(1)=0$ より，$(1,1)$ における接線の方程式は $y=1$ であり，法線の方程式は $x=1$ である．次に，$b=\varphi(a)$ とおく．また，$\varphi(x)$ が点 $x=a$ で極値をとれば，$\varphi'(a)=0$ なので，$(*)$ から，$a=0$ または $b=a^2$ をみたす．ここで，$a=0$ のとき，$b=0$ より，$\varphi'(0)$ は存在しない．よって，$a\neq 0,\pm\sqrt{2/3}$ のとき，$\varphi''(a)=-\dfrac{f_{xx}(a,a^2)}{f_y(a,a^2)}=-\dfrac{4(3a^2-a^2)}{-2a^2+3(a^2)^2}=\dfrac{8}{2-3a^2}$ を得る．

<u>注意</u> $\varphi'(a)=0$ となる a を考える際には, $\varphi(x)$ が a の近傍で定義されていることが前提となる．故に, $f(a,b)=0$, $f_y(a,b)\neq 0$ となる b が存在し (そのとき $b=\varphi(a)$), $\varphi''(a)$ は必ず値が定まる．従って, 上では「$a\neq\cdots$ のとき」という条件をつけたが, 実はこの条件はここで説明した「前提」に含まれるので, 書く必要はない．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\boxed{1}$ (1) より

$$0 = f(a,b) = f(a, 2-4a) = 14a(a-2) \qquad \therefore\ a = 0,\ 2$$

がわかる．よって，$\varphi''(0) = -\dfrac{4}{7} < 0,\ \varphi''(2) = \dfrac{4}{7} > 0$ から，$\varphi(x)$ は点 $x = 0$ で極大値（かつ最大値）2 をとり，点 $x = 2$ で極小値（かつ最小値）-6 をとる．なお，曲線 $f(x,y) = 0$ は楕円を表す．

(2) $\boxed{1}$ (2) より

$$0 = f(a,b) = f(a, a^2) = (a^3+1)(a^3-3) \qquad \therefore\ a = -1,\ \sqrt[3]{3}$$

がわかる．よって，$\varphi''(-1) = 1 > 0,\ \varphi''(\sqrt[3]{3}\,) = -1 < 0$ から，$\varphi(x)$ は点 $x = -1$ で極小値 1 をとり，点 $x = \sqrt[3]{3}$ で極大値 $(\sqrt[3]{3})^2 = \sqrt[3]{9}$ をとる．なお，曲線 $f(x,y) = 0$ はデカルトの正葉線の 1 つである．

(3) $\boxed{1}$ (3) より

$$0 = f(a,b) = f(a, 3a) = a^2(9-a) \qquad \therefore\ a = 0,\ 9$$

がわかる．よって，$\varphi''(9) = 2 > 0$ から，$\varphi(x)$ は点 $x = 9$ で極小値 27 をとる．

(4) $\boxed{1}$ (4) より

$$0 = f(a,b) = f(a, a^2) = a^4(a^2-1) \qquad \therefore\ a = 0,\ \pm 1$$

がわかる．よって，$\varphi''(\pm 1) = -8 < 0$ から，$\varphi(x)$ は点 $x = \pm 1$ で極大値（かつ最大値）1 をとる．ここで，$0 \leqq x^2 = \varphi(x) \pm |\varphi(x)|\sqrt{1-\varphi(x)}$ なので，$\varphi(x) \leqq 1$ に注意する．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (6) (i) 最初に，$f(x,y)$ が極値をとる可能性のある点 (a,b) の候補をラグランジュの未定乗数法で求める．つまり，条件 $g(x,y) = 0$ の下で，$f(x,y)$ がある点 (a,b) で極値をとると仮定する．そのとき，$a^2 + b^2 = 2$ から，$g_x(a,b) = 2a \neq 0$ または $g_y(a,b) = 2b \neq 0$ をみたすので，$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y)$ とおくと，ラグランジュの未定乗数法により，ある実数 α が存在して

$$0 = F_x(a,b,\alpha) = a(3a - 2\alpha),\ \ 0 = F_y(a,b,\alpha) = b(3b - 2\alpha),\ \ 0 = -F_\lambda(a,b,\alpha) = g(a,b) = a^2 + b^2 - 2$$

が成り立つ．ここで，$ab = 0$ のとき，$a^2 + b^2 = 2$ より，$(a,b) = (0, \pm\sqrt{2}\,), (\pm\sqrt{2}, 0)$ を得る．$ab \neq 0$ のとき，$a = b = \dfrac{2}{3}\alpha$ なので，$0 = g(a,b) = \dfrac{8}{9}\alpha^2 - 2$ から，$a = b = \pm 1$ で，$(a,b) = (1,1), (-1,-1)$ がわかる．

(ii) $C = \{(x,y) \mid g(x,y) = 0\}$ は閉曲線 (= 閉じた曲線) なので，この曲線を 1 周するときの値の変化を見れば極大，極小が判定できる．実際，点 (x,y) を円 C に沿って反時計回りに移動させれば，$f(x,y)$ の値は

(x,y)	$(\sqrt{2},0)$	$\cdots$	$(1,1)$	$\cdots$	$(0,\sqrt{2}\,)$	$\cdots$	$(-\sqrt{2},0)$	$\cdots$	$(-1,-1)$	$\cdots$	$(0,-\sqrt{2}\,)$	$\cdots$	$(\sqrt{2},0)$
$f(x,y)$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$

と変化するので，各候補点での極大・極小が次のように判定される．点 $(\sqrt{2},0), (0,\sqrt{2}\,)$ で極大値 (かつ最大値) $2\sqrt{2}$ をとり，点 $(-\sqrt{2},0), (0,-\sqrt{2}\,)$ で極小値 (かつ最小値) $-2\sqrt{2}$ をとる．更に，点 $(1,1)$ で極小値 2 をとり，点 $(-1,-1)$ で極大値 -2 をとる．

(ii)$'$ 以下では C が閉曲線でない場合にも対応できるように，$g(x,y) = 0$ の陰関数を利用して直接，極値の判定を実行する．例えば，候補点 $(1,1)$ での状況を調べてみよう．$(1,1)$ の近傍 $D_r(1,1) = \{(x,y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 < r^2\}$ で，$g(x,y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ をとり ($g_y(1,1) \neq 0$ に注意)，$f(x,y)$ を 1 変数化した関数 $h(x) = f(x, \varphi(x)) = x^3 + \{\varphi(x)\}^3$ を考える．$h(x)$ は $(1,1)$ の近傍で $f(x,y)$ に条件 $g(x,y) = 0$ を組み込んだ関数であるから，$(1,1)$ での極大・極小を判定するには $h''(1)$ の符号を調べればよい．ここで，$h'(x) = 3\bigl[x^2 + \{\varphi(x)\}^2\varphi'(x)\bigr]$, $h''(x) = 3\bigl[2x + 2\varphi(x)\{\varphi'(x)\}^2 + \{\varphi(x)\}^2\varphi''(x)\bigr]$ であり，$\varphi'(1), \varphi''(1)$ は $g(x, \varphi(x)) = 0$ の両辺を x で 2 回微分することで計算される ($\varphi(1) = 1$ に注意)．これが以下の方針である．

$$0 = \frac{d}{dx}g(x,\varphi(x)) = \frac{d}{dx}\{x^2 + \varphi(x)^2 - 2\} = 2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) \qquad \therefore \varphi'(1) = -\frac{1}{\varphi(1)} = -1$$

ここで，当然ながら，$h'(1) = 0$ をみたしている (ラグランジュの未定乗数法が保証)．更に，x で微分すると

$$0 = \frac{d^2}{dx^2}g(x,\varphi(x)) = 2 + 2\{\varphi'(x)\}^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) \qquad \therefore \varphi''(1) = -\frac{1 + \{\varphi'(1)\}^2}{\varphi(1)} = -2$$

を得る．よって，$h''(1) = 3\bigl[2 + 2\varphi(1)\{\varphi'(1)\}^2 + \{\varphi(1)\}^2\varphi''(1)\bigr] = 3(2+2-2) = 6 > 0$ なので，$h(x)$ は $x=1$ で極小値 $h(1)=2$ をとる．つまり，$f(x,y)$ は点 $(1,1)$ で極小値 $f(1,1)=h(1)=2$ をとる．点 $(-1,-1)$ でも全く同様にして，$f(x,y)$ は点 $(-1,-1)$ で極大値 $f(-1,-1)=-2$ をとることがわかる．2点 $(0,\pm\sqrt{2}\,)$ でも同様であり，$f(x,y)$ は点 $(0,\sqrt{2}\,)$ で極大値 $f(0,\sqrt{2}\,)=2\sqrt{2}$ をとり，点 $(0,-\sqrt{2}\,)$ で極小値 $f(0,-\sqrt{2}\,)=-2\sqrt{2}$ をとることがわかる．2点 $(\pm\sqrt{2},0)$ では，$g_y(\pm\sqrt{2},0)=0$ なので, $g(x,y)=0$ の陰関数 $x=\psi(y)$ をとる必要があるが，考え方は前の場合と同じであり，$f(x,y)$ は点 $(\sqrt{2},0)$ で極大値 $f(\sqrt{2},0)=2\sqrt{2}$ をとり，点 $(-\sqrt{2},0)$ で極小値 $f(-\sqrt{2},0)=-2\sqrt{2}$ をとることが示される．

(7) (i) 最初に，$f(x,y)$ が極値をとる可能性のある点 (a,b) の候補をラグランジュの未定乗数法で求める．つまり，条件 $g(x,y)=0$ の下で，$f(x,y)$ がある点 (a,b) で極値をとると仮定する．そのとき，$a^2-b^2=-1$ から，$g_y(a,b)=-2b\neq 0$ をみたすので，$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\, g(x,y)$ とおくと，ラグランジュの未定乗数法により，ある実数 α が存在して

$$0=F_x(a,b,\alpha)=2(1-\alpha\, a),\ \ 0=F_y(a,b,\alpha)=b(3b+2\alpha),\ \ 0=-F_\lambda(a,b,\alpha)=g(a,b)=a^2-b^2+1$$

が成り立つ．ここで, $b\neq 0$ より, $3b+2\alpha=0$ をみたす．そして, α を消去して, $0=2(1-\alpha\, a)+a(3b+2\alpha)=2+3ab$ から，$a=-\dfrac{2}{3b}$ を得る．よって，$0=g\Bigl(-\dfrac{2}{3b},b\Bigr)=\dfrac{(3b^2+1)(3b^2-4)}{9b^2}$ なので，$b=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ を導く．また，$a=-\dfrac{2}{3}\Bigl(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Bigr)=\mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を知る．こうして，$(a,b)=\Bigl(\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Bigr)$, $\Bigl(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Bigr)$ がわかる．

(ii) $H=\{(x,y)\mid g(x,y)=0\}$ は有界でないので，$g(x,y)=0$ の陰関数を利用して極値の判定を実行する．$g_y\Bigl(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\mp\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Bigr)=\pm\dfrac{4}{\sqrt{3}}\neq 0$ から，2点 $\Bigl(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\mp\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Bigr)$ の近傍で $g(x,y)=0$ の C^2 級の陰関数 $y=\varphi(x)$ は存在する．例えば, 点 $\Bigl(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Bigr)$ の近傍 $D_r\Bigl(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Bigr)=\Bigl\{(x,y)\Bigm|\Bigl(x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Bigr)^2+\Bigl(y-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Bigr)^2<r^2\Bigr\}$ で, $g(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ をとり，$f(x,y)$ を1変数化した関数 $h(x)=f(x,\varphi(x))=2x+\{\varphi(x)\}^3$ を考える．$h(x)$ は $\Bigl(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Bigr)$ の近傍で $f(x,y)$ に条件 $g(x,y)=0$ を組み込んだ関数であるから，$\Bigl(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Bigr)$ での極大・極小を判定するには $h''\Bigl(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Bigr)$ の符号を調べればよい．ここで，$h'(x)=2+3\{\varphi(x)\}^2\varphi'(x)$, $h''(x)=6\varphi(x)\{\varphi'(x)\}^2+3\{\varphi(x)\}^2\varphi''(x)$ であり，$\varphi'\Bigl(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Bigr),\varphi''\Bigl(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Bigr)$ は $g(x,\varphi(x))=0$ の両辺を x で2回微分することで計算される ($\varphi(-\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{2}{\sqrt{3}}$ に注意)．これが以下の方針である．

$$0=\frac{d}{dx}g(x,\varphi(x))=\frac{d}{dx}\{x^2-\varphi(x)^2+1\}=2x-2\varphi(x)\varphi'(x)\quad\therefore\varphi'\Bigl(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Bigr)=\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}}=-\frac{1}{2}$$

ここで，当然ながら，$h'\Bigl(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Bigr)=0$ が成り立つ (ラグランジュの未定乗数法が保証)．更に，x で微分すると

$$0=\frac{d^2}{dx^2}g(x,\varphi(x))=2-2\{\varphi'(x)\}^2-2\varphi(x)\varphi''(x)\quad\therefore\varphi''\Bigl(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Bigr)=\frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{2}{\sqrt{3}}}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

を得る．よって，$h''\Bigl(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Bigr)=6\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{1}{4}+3\cdot\dfrac{4}{3}\dfrac{3\sqrt{3}}{8}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}>0$ なので，$h(x)$ は $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で極小値 $h\Bigl(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Bigr)=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ をとる．つまり，$f(x,y)$ は点 $\Bigl(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Bigr)$ で極小値 $f\Bigl(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Bigr)=h\Bigl(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Bigr)=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ をとる．点 $\Bigl(\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Bigr)$ でも全く同様にして，$f(x,y)$ は点 $\Bigl(\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Bigr)$ で極大値 $f\Bigl(\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Bigr)=-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ をとることがわかる．

注意　$g(x,y)=0$ の構造が簡単なので，極大・極小の判定に関しては，次のような考察も可能．曲線 $g(x,y)=x^2-y^2+1=0$ は, 共有点をもたない2本の曲線 $y=\pm\sqrt{x^2+1}$ からなる．点 $(-1/\sqrt{3},\,2/\sqrt{3}\,)$ は曲線 $C_1: y=\sqrt{x^2+1}$ 上にあり，C_1 上では $f(x,y)=2x+y^3\to\infty$ $(x\to\pm\infty)$ となるから，$(-1/\sqrt{3},\,2/\sqrt{3}\,)$ では極小値 (C_1 上の最小値) をとることが分かる．一方, 点 $(1/\sqrt{3},\,-2/\sqrt{3}\,)$ は $C_2: y=-\sqrt{x^2+1}$ 上にあり, C_2 上では $f(x,y)=2x+y^3\to-\infty$ $(x\to\pm\infty)$ となるから, $(1/\sqrt{3},\,-2/\sqrt{3}\,)$ では極大値 (C_2 上の最大値) をとることが分かる．

【レポート課題の解答例】

4 $f(x,y)=0$ の定める陰関数 $y=\varphi(x)$ について考える．$f(x,y)=2x^3-3x^2+y^2-3=0$ $(y=\varphi(x))$ の両辺を x で微分すると

$$0=6x^2-6x+2yy'=2\{yy'-3x(1-x)\} \quad \therefore \varphi'(x)=y'=\frac{3x(1-x)}{y}=\frac{3x(1-x)}{\varphi(x)} \qquad (*)$$

$b=\varphi(a)$ とおくとき，$f(a,b)=0$ であり，$\varphi'(a)=0$ ならば，$\varphi''(a)=-\dfrac{f_{xx}(a,b)}{f_y(a,b)}=-\dfrac{6a-3}{b}$ となる．(実は $(*)$ は $\varphi'(a)=-\dfrac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}=-\dfrac{3a(a-1)}{b}$ であった.) $\varphi(x)$ が点 $x=a$ で極値をとれば，$\varphi'(a)=0$ なので，$(*)$ から，$a=0$ または $a=1$ が導かれる．

- $a=0$ のとき，$0=f(0,b)=b^2-3$ より，$b=\pm\sqrt{3}$．$y=\varphi(x)$ が点 $(0,\sqrt{3})$ の近傍で定まる陰関数ならば，$\varphi''(0)=-\dfrac{-3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}>0$ であるから，この $\varphi(x)$ は $x=0$ で極小値 $\sqrt{3}$ をとる．一方，$y=\varphi(x)$ が点 $(0,-\sqrt{3})$ の近傍で定まる陰関数ならば，$\varphi''(0)=-\dfrac{-3}{-\sqrt{3}}=-\sqrt{3}<0$ であるから，この $\varphi(x)$ は $x=0$ で極大値 $-\sqrt{3}$ をとる．
- $a=1$ のとき，$0=f(1,b)=b^2-4$ より，$b=\pm 2$．$y=\varphi(x)$ が点 $(1,2)$ の近傍で定まる陰関数ならば，$\varphi''(1)=-\dfrac{6-3}{2}=-\dfrac{3}{2}<0$ であるから，この $\varphi(x)$ は $x=1$ で極大値 2 をとる．一方，$y=\varphi(x)$ が点 $(1,-2)$ の近傍で定まる陰関数ならば，$\varphi''(1)=-\dfrac{6-3}{-2}=\dfrac{3}{2}>0$ であるから，この $\varphi(x)$ は $x=1$ で極小値 -2 をとる．

5 (i) 最初に，$f(x,y)$ が極値をとる可能性のある点 (a,b) の候補をラグランジュの未定乗数法で求める．条件 $g(x,y)=0$ の下で，$f(x,y)$ がある点 (a,b) で極値をとると仮定する．そのとき，$g(a,b)=0$ から，$g_x(a,b)=2a-b\neq 0$ または $g_y(a,b)=2b-a-1\neq 0$ をみたす (実際，両方とも等号なら $(a,b)=(1/3,2/3)$ となるがこれは $g(a,b)=0$ をみたさない)．そこで，$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ とおくと，ラグランジュの未定乗数法により，ある実数 α が存在して

$$0=F_x(a,b,\alpha)=1-\alpha(2a-b),\ \ 0=F_y(a,b,\alpha)=-1-\alpha(-a+2b-1),$$
$$0=-F_\lambda(a,b,\alpha)=g(a,b)=a^2-ab+b^2-b$$

が成り立つ．最初の 2 式より $1/\alpha=2a-b=a-2b+1$ であるから，$b=1-a$．これを第 3 式に代入して，$a(a-2/3)=0$ から $a=0,2/3$ を得る．よって，$(a,b)=(0,1),(2/3,1/3)$ がわかる．

(ii) 楕円 $E=\{(x,y)\mid g(x,y)=0\}$ は有界かつ閉集合なので，「有界かつ閉集合における連続関数は最大値と最小値をもつ」という事実を用いれば，$f(0,1)=-1<1/3=f(2/3,1/3)$ から，次のことがわかる．条件 $g(x,y)=0$ の下で $f(x,y)=x-y$ は点 $(0,1)$ で極小値 (かつ最小値) -1 をとり，点 $(2/3,1/3)$ で極大値 (かつ最大値) $1/3$ をとる．

(ii)$'$ ［E が有界でない場合にも対応できる方法］$g(x,y)=0$ の陰関数を利用して直接，極値の判定を実行する．まず，準備として，$g(x,y)=x^2-xy+y^2-y=0$ の定める陰関数 $y=\varphi(x)$ の 2 次までの導関数を考える．$x^2-xy+y^2-y=0$ $(y=\varphi(x))$ の両辺を x で微分して $2x-y-(x-2y+1)y'=0$．更にこの両辺を x で微分して，$2-2(1+y')y'-(x+2y-1)y''=0$．よって，

$$\varphi'(x)=y'=\frac{2x-y}{x-2y+1}=\frac{2x-\varphi(x)}{x-2\varphi(x)+1},\quad \varphi''(x)=y''=\frac{2+2(y'-1)y'}{x-2y+1}=\frac{2+2(\varphi'(x)-1)\varphi'(x)}{x-2\varphi(x)+1}.$$

- $y=\varphi(x)$ が点 $(0,1)$ の近傍で定まる陰関数のとき，$\varphi(0)=1$ と上の関係式より，$\varphi'(0)=1$, $\varphi''(0)=-2$．ここで，$h(x)=f(x,\varphi(x))=x-\varphi(x)$ とおけば，$h'(0)=1-\varphi'(0)=0$, $h''(0)=-\varphi''(0)=2>0$．よって，$h(0)=-1$ は極小値である．
- $y=\varphi(x)$ が点 $(2/3,1/3)$ の近傍で定まる陰関数のとき，$\varphi(2/3)=1/3$ と上の関係式より，$\varphi'(2/3)=1$, $\varphi''(2/3)=2$．ここで，$h(x)=f(x,\varphi(x))=x-\varphi(x)$ とおけば，$h'(2/3)=1-\varphi'(2/3)=0$, $h''(2/3)=-\varphi''(2/3)=-2<0$．よって，$h(2/3)=1/3$ は極大値である．