数学演習第二 （演習第９回）

線形：線形写像，核と像　2022 年 12 月 21 日

要点

〈線形写像〉（線形教科書 pp. 142–144）

- V, W をベクトル空間とする．以下の条件 (1), (2) を満たす写像 $f\colon V \to W$ を **線形写像** という．
  (1) 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して，$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})$ が成り立つ．
  (2) 任意の $\boldsymbol{a} \in V$，$k \in \mathbb{R}$ に対して，$f(k\boldsymbol{a}) = kf(\boldsymbol{a})$ が成り立つ．

  これら (1), (2) の性質を**線形性**という．
- V の零ベクトルを $\mathbf{0}_V$，W の零ベクトルを $\mathbf{0}_W$ とする．このとき，$f\colon V \to W$ が線形写像ならば
$$f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$$
  が成り立つ．この対偶を取ると，$f(\mathbf{0}_V) \neq \mathbf{0}_W$ ならば f は線形写像でない．
- A を $m \times n$ 行列とし，$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める．このとき，f は線形写像となる．実際，任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$ に対して，
$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = A(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = A\boldsymbol{a} + A\boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b}), \quad f(k\boldsymbol{a}) = A(k\boldsymbol{a}) = kA\boldsymbol{a} = kf(\boldsymbol{a}).$$

〈線形写像の決定〉（線形教科書 pp. 145–146）

- V, W をベクトル空間，$(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ を V の基底とする．任意の $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n \in W$ に対して，
$$f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{b}_1,\ \ldots,\ f(\boldsymbol{a}_n) = \boldsymbol{b}_n$$
  を満たす線形写像 $f\colon V \to W$ がただ一つ存在する．

〈線形写像の核，像〉（線形教科書 pp. 139–142, 147–154）

- V, W をベクトル空間，$f\colon V \to W$ を線形写像とする．このとき，
$$\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{a} \in V \mid f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}_W\} \subset V$$
  を f の**核**といい，
$$\operatorname{Im} f = f(V) = \{f(\boldsymbol{a}) \mid \boldsymbol{a} \in V\} \subset W$$
  を f の**像**という．$\operatorname{Ker} f$ は V の部分空間となり，$\operatorname{Im} f$ は W の部分空間となる．
- A を $m \times n$ 行列とする．$f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定められる線形写像 $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を考える．このとき，$\operatorname{Ker} f_A$ は A の零空間 $N(A)$ に一致する．また，$\mathbb{R}^n$ の標準基底 $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ に対して，
$$\operatorname{Im} f_A = \langle f_A(\boldsymbol{e}_1),\ \ldots,\ f_A(\boldsymbol{e}_n) \rangle$$
  となる．すなわち，$\operatorname{Im} f_A$ は $f_A(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f_A(\boldsymbol{e}_n)$ で生成される．$A = [\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$ と表せば，$f_A(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{a}_1, \ldots, f_A(\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{a}_n$ なので，$\operatorname{Im} f_A = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ となり，$\operatorname{Im} f_A$ は A の列空間 $C(A)$ に一致する．
- 写像 $f\colon V \to W$ が**単射**であるとは，任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して，$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b} \Rightarrow f(\boldsymbol{a}) \neq f(\boldsymbol{b})$ が成り立つことをいう．また，f が**全射**であるとは，$f(V) = W$ が成り立つことをいう．
- $f\colon V \to W$ が線形写像であるとき，次の (1)–(3) が成り立つ．
  (1) f が単射 $\iff \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_V\} \iff \dim \operatorname{Ker} f = 0$.
  (2) f が全射 $\iff \operatorname{Im} f = W \iff \dim \operatorname{Im} f = \dim W$.
  (3) $\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

例 1　$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 1 \end{bmatrix}$ で定める．このとき，

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

なので，f は線形写像でない．

例 2　$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}$ で定める．このとき，f は線形写像の定義 (2) を満たさないので，線形写像でない．実際，$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$k = 2$ に対して，

$$f(k\boldsymbol{a}) = f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2+2 \\ 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad kf(\boldsymbol{a}) = 2f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} 1+1 \\ 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

となり，$f(k\boldsymbol{a}) \neq kf(\boldsymbol{a})$.

例 3　$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ を満たす線形写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を求める．

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする．まず，$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ を満たす c_1, c_2 を求める．この式を変形すると

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

となる．よって，

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (2x_1 - x_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-x_1 + x_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

次に，この式を用いて，

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) &= f\left((2x_1 - x_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-x_1 + x_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \\ &\overset{\text{線形性}}{=} (2x_1 - x_2) f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + (-x_1 + x_2) f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \\ &\overset{\text{仮定}}{=} (2x_1 - x_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-x_1 + x_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

を得る．以上で線形写像 f を求めることができた．

演習問題

1 以下の写像が線形写像になるかどうか調べよ．

(1) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}$ で定義される写像 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

(2) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 1 \end{bmatrix}$ で定義される写像 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

(3) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ で定義される写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(4) $f(p(t)) = p'(t)$ で定義される写像 $f\colon \mathbb{R}[t]_{n+1} \to \mathbb{R}[t]_n$．ただし，$\mathbb{R}[t]_n$ は n 次以下の実係数多項式全体からなるベクトル空間とする．

2 $m \times n$ 行列 A を次のように定めるとき，それぞれの A が決める $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ について以下の問いに答えよ．

$$\text{(i)}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad \text{(iii)}\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(1) $\operatorname{Ker} f$ の次元と基底を求めよ．($\{\mathbf{0}\}$ の場合，基底は無し，次元は 0 であることに注意せよ．)

(2) $\operatorname{Im} f$ の次元と基底を求めよ．

(3) f は単射であるかどうかを調べよ．また，全射であるかどうかを調べよ．

3 (1) k を実数とする．

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ k \end{bmatrix}$$

を満たす線形写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を求めよ．[*1]

(2) (1) の f が単射にならないための k の条件を求めよ．さらに，k がその条件を満たすとき，$\operatorname{Im} f$ の次元と基底を求めよ．

4 線形写像 $D\colon \mathbb{R}[t]_3 \to \mathbb{R}[t]_3$ を

$$D(p(t)) = 2p(t) - (t+1)p'(t)$$

で定義する．

(1) $\operatorname{Ker} D$ の次元と基底を求めよ．

(2) $\operatorname{Im} D$ の次元と基底を求めよ．

[*1] 「$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を求めよ」は「$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$ を求めよ」あるいは「$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる行列 A を求めよ」と解釈する (数学演習ウェブページ公開時に加筆).

レポート課題

- **答だけでなく，計算の過程も**書いて下さい．（A4 **用紙１〜２枚**にまとめ, pdf ファイルに変換して提出）
- 授業に出席し, レポートを授業翌日までに **WebClass に提出**して「出席」となります.

$\boxed{1}$ 写像 $f\colon \mathbb{R}[t]_n \to \mathbb{R}[t]_{n+1}$ を

$$f(p(t)) = \int_0^t p(s)\,ds$$

で定める ($\mathbb{R}[t]_n$ の定義は演習問題 $\boxed{1}$ (4) を参照せよ).

(1) f は線形写像であることを示せ.

(2) f は単射であるが全射でないことを示せ.

$\boxed{2}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ とし，線形写像 $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める.

(1) $\operatorname{Ker} f$ の次元と基底を求めよ.

(2) $\operatorname{Im} f$ の次元と基底を求めよ.