数学演習第二（演習第９回）　【解答例】

線形：線形写像，核と像　　2022 年 12 月 21 日

演習問題

1

(1) 任意の $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $k \in \mathbb{R}$ に対して，

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (x_1+y_1)+(x_2+y_2) \\ (x_1+y_1)+(x_3+y_3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_1+x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1+y_2 \\ y_1+y_3 \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right),$$

$$f\left(k\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ kx_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} kx_1+kx_2 \\ kx_1+kx_3 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_1+x_3 \end{bmatrix} = kf\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)$$

が成り立つ．よって，$\underline{f\text{ は線形写像である}}$．

(2) $f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ となるので，$\underline{f\text{ は線形写像ではない}}$．

(3) $f\left(2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = 12$，$2f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot 3 = 6$ より，$f\left(2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \neq 2f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$．よって，$\underline{f\text{ は線形写像ではない}}$．

(4) 任意の $p(t), q(t) \in \mathbb{R}[t]_{n+1}$，$k \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(p(t)+q(t)) = p'(t)+q'(t) = f(p(t))+f(q(t)), \quad f(kp(t)) = kp'(t) = kf(p(t))$$

が成り立つ．よって，$\underline{f\text{ は線形写像である}}$．

2

(i) (1) A の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ なので，$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$．よって，$\operatorname{Ker} f$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)}$ を選ぶことができて，$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f = 1}$ である．

(2) $\operatorname{Im} f = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ であり，$\operatorname{Im} f$ の基底はこれら 3 つのベクトルの中から一次独立な最大個数の組を選べばよい．A の簡約行列の主成分は 1 列と 3 列にあるので，3 つのベクトルから 1 番目と 3 番目を選んだ組，すなわち $\boxed{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}$ を $\operatorname{Im} f$ の基底として選ぶことができる．よって，$\boxed{\dim \operatorname{Im} f = 2}$．（$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ であるから，$\operatorname{Im} f$ の基底として，$\mathbb{R}^2$ の標準基底を選んでもよい．）

(3) $\dim \operatorname{Ker} f = 1 \neq 0$，$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^2$ なので，$\underline{f\text{ は単射でないが全射である}}$．

(ii) (1) A の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ なので，$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$ となる．よって, $\operatorname{Ker} f$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}$ を選ぶことができて，$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f = 1}$ である．

(2) $\mathrm{Im}\, f = \left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\0\\7\end{bmatrix} \right\rangle$ であり，A の簡約行列の主成分が 1 列目と 2 列目にあることから，$\mathrm{Im}\, f$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\\5\end{bmatrix}\right)}$ を選ぶことができる．よって，$\boxed{\dim \mathrm{Im}\, f = 2}$ となる．

(3) $\dim \mathrm{Ker}\, f = 1 \neq 0$，$\dim \mathrm{Im}\, f = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3$ なので，$\underline{f \text{ は単射でも全射でもない}}$．

(iii) (1) A の簡約行列は $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ なので，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみ．すなわち，$\boxed{\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{0}\}}$，$\boxed{\dim \mathrm{Ker}\, f = 0}$ である．（$\mathrm{Ker}\, f$ の基底は無し．）

(2) $\mathrm{Im}\, f = \left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\0\\6\end{bmatrix} \right\rangle$ であり，A の簡約行列の主成分がすべての列にあることから，$\mathrm{Im}\, f$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\0\\6\end{bmatrix}\right)}$ を選ぶことができる．よって，$\boxed{\dim \mathrm{Im}\, f = 3}$．

（$\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^3$ であるから，$\mathrm{Im}\, f$ の基底として，$\mathbb{R}^3$ の標準基底を選んでもよい．）

(3) $\dim \mathrm{Ker}\, f = 0$，$\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathbb{R}^3$ なので，$\underline{f \text{ は単射かつ全射 (全単射) である}}$．

3 (1) 各 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して，$f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)$ を求める．そのために，まず，$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$ を満たす $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ を求めると，$\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3&2\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3x_1+2x_2\\2x_1-x_2\end{bmatrix}$．よって，$f$ の線形性により，

$$f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = f\left((-3x_1+2x_2)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + (2x_1-x_2)\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right) = (-3x_1+2x_2)f\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) + (2x_1-x_2)f\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)$$

$$= (-3x_1+2x_2)\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix} + (2x_1-x_2)\begin{bmatrix}2\\6\\k\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}x_1\\3x_1\\(2k-15)x_1+(10-k)x_2\end{bmatrix}}.$$

【別解】線形写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ は 3×2 行列 A を用いて $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表される．この行列 A を求めよう．

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix},\quad f\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\6\\k\end{bmatrix} \quad \text{より，} \quad A\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&2\\3&6\\5&k\end{bmatrix}.$$

よって，

$$A = \begin{bmatrix}1&2\\3&6\\5&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1&2\\3&6\\5&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&2\\2&-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\3&0\\2k-15&10-k\end{bmatrix}.$$

(2) (1) より，f は行列 $A = \begin{bmatrix}1&0\\3&0\\2k-15&10-k\end{bmatrix}$ を用いて $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表される．f が単射にならないのは $\dim \mathrm{Ker}\, f \neq 0$ のとき，すなわち $\mathrm{rank}\, A \neq 2$ のときである．A は $\begin{bmatrix}1&0\\0&10-k\\0&0\end{bmatrix}$ と簡約化できるから，求める条件は $\boxed{k=10}$．この条件が成り立つとき，$A = \begin{bmatrix}1&0\\3&0\\5&0\end{bmatrix}$ だから，$\boxed{\dim \mathrm{Im}\, f = 1}$ で，$\mathrm{Im}\, f$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}\right)}$ がとれる．

$\boxed{4}$ (1) $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ とおくと,

$$\begin{aligned} D(p(t)) &= 2(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) - (t+1)(a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2) \\ &= (2a_0 - a_1) + (a_1 - 2a_2)t - 3a_3 t^2 - a_3 t^3 \end{aligned}$$

となる．これより，$p(t) \in \operatorname{Ker} D$ となるための必要十分条件は，$2a_0 - a_1 = 0$，$a_1 - 2a_2 = 0$，$a_3 = 0$ となることである．この連立一次方程式を解いて，$a_0 = c$，$a_1 = 2c$，$a_2 = c$，$a_3 = 0$ (c は任意) を得る．すなわち，$p(t) \in \operatorname{Ker} D \Leftrightarrow p(x) = c(1 + 2t + t^2)$．よって，$\operatorname{Ker} D$ の基底として $\boxed{\left(1 + 2t + t^2\right)}$ を選ぶことができて，$\boxed{\dim \operatorname{Ker} D = 1}$ となる．

(2) $\mathbb{R}[t]_3$ の基底として，$\left(1,\, t,\, t^2, t^3\right)$ を取ると，$D(1) = 2$，$D(t) = -1 + t$，$D(t^2) = -2t$，$D(t^3) = -3t^2 - t^3$ であることから，$\operatorname{Im} D = \left\langle 2,\, -1+t,\, -2t,\, -3t^2 - t^3 \right\rangle$ となる．ここで, $-2t$ は 2 と $-1+t$ の一次結合として，$-2t = -1 \times 2 - 2 \times (-1+t)$ のように表せるから，$\operatorname{Im} D = \left\langle 2,\, -1+t,\, -3t^2 - t^3 \right\rangle$ となり，さらに，この 3 つの多項式は一次独立となる．よって，$\operatorname{Im} D$ の基底として $\boxed{\left(2,\, -1+t,\, -3t^2 - t^3\right)}$ を取ることができて，$\boxed{\dim \operatorname{Im} D = 3}$ となる．（より簡潔な基底として，$\boxed{\left(1,\, t,\, 3t^2 + t^3\right)}$ を選んでもよい．）

レポート問題

1

(1) 任意の $p(t), q(t) \in \mathbb{R}[t]_n$，$k \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(p(t)+q(t)) = \int_0^t (p(s)+q(s))\,ds = \int_0^t p(s)\,ds + \int_0^t q(s)\,ds = f(p(t)) + f(q(t)),$$
$$f(kp(t)) = \int_0^t kp(s)\,ds = k\int_0^t p(s)\,ds = kf(p(t))$$

が成り立つ．よって，f は線形写像である．

(2) $p(t) \in \operatorname{Ker} f$ のとき，$\displaystyle\int_0^t p(s)\,ds = 0$ が成り立つので，両辺を t で微分して，$p(t) = 0$ を得る．よって $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ となり，f は単射である．また，任意の $p(t) \in \operatorname{Im} f$ は $p(0) = 0$ を満たすので，$1 \notin \operatorname{Im} f$ となるから，f は全射ではない．

【別解】線形写像 $f\colon \mathbb{R}[t]_n \to \mathbb{R}[t]_{n+1}$ に対して，$\dim \mathbb{R}[t]_n = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$ が成り立つ．(1) で示したように $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ であるから，$\dim \operatorname{Ker} f = 0$．よって，

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}[t]_n = n+1 < n+2 = \dim \mathbb{R}[t]_{n+1}$$

となり，f は全射ではない．

2

(1) A に行基本変形を施すと，

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる．よって $\boxed{\dim \operatorname{Ker} f = 2}$ で，$\operatorname{Ker} f$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)}$ が取れる．

(2) $\operatorname{rank} A = 2$ より $\boxed{\dim \operatorname{Im} f = 2}$ で，A の簡約行列の主成分をもつ列が第 1 列と第 2 列にあることから，$\operatorname{Im} f$ の基底として，$\boxed{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \right)}$ が取れる．

【別解】$\operatorname{Im} f = C(A)$ (A の列空間) であるから，次のようにして $\operatorname{Im} f$ の基底を求めることもできる．${}^tA$ を行基本変形して，

$${}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

これから $\operatorname{Im} f$ の基底 $\boxed{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right)}$ を得る．もちろん，${}^tA$ を行基本変形する代わりに，A を直接列基本変形してもよい：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -11 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$