

数学演習第二 (演習 第10回)

微積：重積分 [1] (重積分の定義, 累次積分) の解答例

2023年1月11日 実施分

【授業中の演習問題の解答例】

1

(1) $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2x\} \cup \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3/2, x \leq y \leq 3-x\}$ より

$$\begin{aligned} \iint_D (2x-y) dx dy &= \int_0^1 dx \int_x^{2x} (2x-y) dy + \int_1^{3/2} dx \int_x^{3-x} (2x-y) dy \\ &= \int_0^1 \left[2xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=x}^{y=2x} dx + \int_1^{3/2} \left[2xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=x}^{y=3-x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx + \int_1^{3/2} \left(-4x^2 + 9x - \frac{9}{2} \right) dx = \frac{1}{6} + \frac{5}{24} = \boxed{\frac{3}{8}}. \end{aligned}$$

(2) $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 6-y\}$ より

$$\iint_D xy dx dy = \int_0^2 dy \int_{y^2}^{6-y} xy dx = \int_0^2 \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_{x=y^2}^{x=6-y} dy = \frac{1}{2} \int_0^2 \{(6-y)^2 y - y^5\} dy = \boxed{\frac{50}{3}}.$$

(3) $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi-x\}$ より

$$\begin{aligned} \iint_D x \sin(x+y) dx dy &= \int_0^\pi dx \int_0^{\pi-x} x \sin(x+y) dy = \int_0^\pi [-x \cos(x+y)]_{y=0}^{y=\pi-x} dx \\ &= \left[x \sin x + \cos x + \frac{x^2}{2} \right]_0^\pi = \boxed{\frac{\pi^2}{2} - 2}. \end{aligned}$$

(4) $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4\}$ より

$$\iint_D x e^y dx dy = \int_0^2 dx \int_{x^2}^4 x e^y dy = \int_0^2 \frac{e^4 - e^{x^2}}{2} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} [e^4 x^2 - e^{x^2}]_0^2 = \boxed{\frac{3e^4 + 1}{2}}.$$

(5) $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2/x\}$ より

$$\begin{aligned} \iint_D y \log_e x dx dy &= \int_1^2 dx \int_0^{2/x} y \log x dy = \int_1^2 \left[\frac{y^2}{2} \log x \right]_{y=0}^{y=2/x} dx = 2 \int_1^2 \frac{\log x}{x^2} dx \\ &= 2 \left(\left[-\frac{\log x}{x} \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{dx}{x^2} \right) = 2 \left(-\frac{\log 2}{2} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 \right) = \boxed{1 - \log 2}. \end{aligned}$$

(6) $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$ より

$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x+y+1}} = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \frac{dy}{\sqrt{x+y+1}} = \int_0^1 \left[2\sqrt{x+y+1} \right]_{y=0}^{y=x^2} dx = 2 \int_0^1 (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x+1}) dx.$$

ここで, $\int_0^1 \sqrt{x^2+x+1} dx = \int_0^1 \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx = \int_{1/2}^{3/2} \sqrt{x^2 + \frac{3}{4}} dx$ であり, $A > 0$ (定数) として,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2+A} dx &= x\sqrt{x^2+A} - \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+A}} dx = x\sqrt{x^2+A} - \int \left(\sqrt{x^2+A} - \frac{A}{\sqrt{x^2+A}} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2+A} + A \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} \right) = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2+A} + A \log(x + \sqrt{x^2+A}) \right) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x+y+1}} &= \left[x\sqrt{x^2 + \frac{3}{4}} + \frac{3}{4} \log \left(x + \sqrt{x^2 + \frac{3}{4}} \right) \right]_{1/2}^{3/2} - \left[\frac{4}{3} (x+1)^{3/2} \right]_0^1 \\ &= \boxed{\frac{5}{6} - \frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4} \log \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right)}. \end{aligned}$$

【別法】 $\int \sqrt{x^2+x+1} dx$ の計算に $\int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \operatorname{Sinh}^{-1} \frac{x}{a} \right)$ ($a > 0$: 定数) を利用してもよい。ただし, $\operatorname{Sinh}^{-1} x$ は $\sinh x$ の逆関数を表す: $\operatorname{Sinh}^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$.

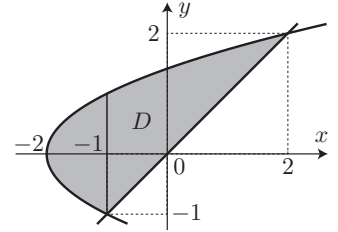
【レポート課題の解答例】

2 レポート課題

- (1) まず, $y^2 - 2 \leq x \leq y$ ($-1 \leq y \leq 2$) から, $-2 \leq x \leq 2$ がわかる. また, $y^2 - 2 \leq x$ より, $-\sqrt{x+2} \leq y \leq \sqrt{x+2}$ を得る. よって, $\max\{x, -\sqrt{x+2}\} \leq y \leq \sqrt{x+2}$ を知る. ここで, $x \geq 0$ のとき, $-\sqrt{x+2} \leq x$ は明らかなので, $x < 0$ の場合を考える. このとき, $0 < -x \leq \sqrt{x+2}$ は $x^2 \leq x+2$ と同値で, $0 \geq x^2 - (x+2) = (x+1)(x-2)$ から, $-1 \leq x \leq 2$ ならば, $-\sqrt{x+2} \leq x$ で, $-2 \leq x \leq -1$ ならば, $x \leq -\sqrt{x+2}$ がわかった. 以上から,

$$I = \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{x+2}}^{\sqrt{x+2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^2 dx \int_x^{\sqrt{x+2}} f(x, y) dy \quad \text{となる.}$$

積分領域 $D = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 2, y^2 - 2 \leq x \leq y\}$ は右のように図示される. 図が描ければ, より直感的に理解できる.



- (2) D は次の D_1 と D_2 に分割される.

$$D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2 \leq y^3\} = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^{3/2}\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, y^3 \leq x^2\} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^{2/3}\}.$$

よって,

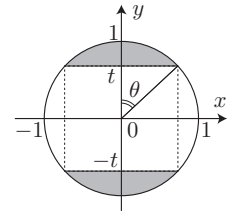
$$J = \int_0^1 dy \int_0^{y^{3/2}} y^3 dx + \int_0^1 dx \int_0^{x^{2/3}} x^2 dy = \int_0^1 y^9/2 dy + \int_0^1 x^8/3 dx = \frac{2}{11} + \frac{3}{11} = \frac{5}{11}.$$

- (3) 平面 $z = t$ ($0 \leq t \leq 1$) で C を切ったときの断面は $t \leq |y| \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$ である. よって,

$$S(t) = 2 \int_t^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx = 4 \int_t^1 \sqrt{1-y^2} dy = 2 \left[y\sqrt{1-y^2} + \sin^{-1} y \right]_t^1 = \pi - 2t\sqrt{1-t^2} - 2 \sin^{-1} t.$$

【別法】 断面は $x^2 + y^2 \leq 1, |y| \geq t$ で与えられる 2 つの弓形 ($0 \leq t \leq 1$ に注意). 右図のように θ をとれば $\cos \theta = t$ であるから, 図形的に考えて

$$S(t) = 4 \left(\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{2} t \sqrt{1-t^2} \right) = 2(\cos^{-1} t - t\sqrt{1-t^2}).$$



- (4) t は $0 \leq t \leq 1$ を動くので,

$$v(C) = \int_0^1 S(t) dt = \pi - 2 \left[-\frac{1}{3}(1-t^2)^{3/2} \right]_0^1 - 2 \left[t \sin^{-1} t + \sqrt{1-t^2} \right]_0^1 = \pi - \frac{2}{3} - (\pi - 2) = \frac{4}{3}.$$

【自習用問題の解答例】

3 2重積分の値を求める問題

- (1) (i) y に関して単純な領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 2y\}$ とみなす場合.

$$\iint_D x^2 y dx dy = \int_0^1 dy \int_y^{2y} x^2 y dx = \int_0^1 y \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{x=y}^{x=2y} dy = \int_0^1 \frac{7}{3} y^4 dy = \frac{7}{3} \left[\frac{1}{5} y^5 \right]_0^1 = \frac{7}{15}.$$

- (ii) x に関して単純な領域とみなす場合. この場合, D は次の D_1 と D_2 に分割される.

$$D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \frac{1}{2}x \leq y \leq x\}, \quad D_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{2}x \leq y \leq 1\}.$$

よって,

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y dx dy &= \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}x}^x x^2 y dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^1 x^2 y dy \\ &= \int_0^1 x^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=\frac{1}{2}x}^{y=x} dx + \int_1^2 x^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=\frac{1}{2}x}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{8} x^4 \right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 \right) dx = \left[\frac{3}{40} x^5 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{40} x^5 \right]_1^2 = \frac{7}{15}. \end{aligned}$$

$$(2) \iint_D \sqrt{x^2 - y^2} dx dy = \int_0^1 dx \underbrace{\int_0^x \sqrt{x^2 - y^2} dy}_{\text{半径 } x \text{ の円の面積の } 1/4} = \int_0^1 \frac{\pi x^2}{4} dx = \left[\frac{\pi x^3}{12} \right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{12}}. \quad \text{円の面積で計算した部分は}$$

$$\int_0^x \sqrt{x^2 - y^2} dy = \left[\frac{1}{2} \left(y \sqrt{x^2 - y^2} + x^2 \sin^{-1} \frac{y}{x} \right) \right]_{y=0}^{y=x} = \frac{\pi x^2}{4} \quad (x > 0) \text{ と計算することもできる.}$$

$$(3) D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\} \text{ と表せる (原点中心, 半径 } a \text{ の円の右半分).}$$

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{xy^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx dy &= \int_0^a dx \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{xy^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dy = \int_0^a 2 \left[\frac{xy^3}{3\sqrt{a^2 - x^2}} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= \int_0^a \frac{2}{3} x (a^2 - x^2) dx = \left[\frac{1}{3} a^2 x^2 - \frac{1}{6} x^4 \right]_0^a = \boxed{\frac{a^4}{6}}. \end{aligned}$$

$$\text{【別法】 累次積分の順序を交換すると, (与式) = } \int_{-a}^a dy \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} \frac{xy^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

$$\int_{-a}^a \left[-y^2 \sqrt{a^2 - x^2} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{a^2 - y^2}} dy = \int_{-a}^a \underbrace{y^2(a - |y|)}_{\text{偶関数}} dy = 2 \int_0^a y^2(a - y) dy = 2 \left[\frac{ay^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^a = \boxed{\frac{a^4}{6}}.$$

$$(4) D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} - x\} \text{ として,}$$

$$\begin{aligned} \iint_D \cos(x + y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2} - x} \cos(x + y) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(x + y)]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2} - x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin x \right) dx = [x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{2} - 1}. \end{aligned}$$

$$(5) D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, \sqrt{x} \leq y \leq 2\} \text{ として,}$$

$$\begin{aligned} \iint_D (x + y) dx dy &= \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 (x + y) dy = \int_0^4 \left[xy + \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=\sqrt{x}}^{y=2} dx \\ &= \int_0^4 \left(2x + 2 - x\sqrt{x} - \frac{1}{2} x \right) dx \\ &= \int_0^4 \left(\frac{3}{2} x + 2 - x^{\frac{3}{2}} \right) dx = \left[\frac{3}{4} x^2 + 2x - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 = \boxed{\frac{36}{5}}. \end{aligned}$$

$$(6) D \text{ は中心 } (1/2, 0), \text{ 半径 } 1/2 \text{ の円であり, } D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{x - x^2} \leq y \leq \sqrt{x - x^2}\} \text{ と表せる.}$$

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x} dx dy &= \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x - x^2}}^{\sqrt{x - x^2}} \sqrt{x} dy = \int_0^1 \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x - x^2} dx = \int_0^1 2x\sqrt{1 - x} dx \\ &= \int_1^0 2(1 - t^2)t \cdot (-2t) dt = 4 \int_0^1 (t^2 - t^4) dt = \boxed{\frac{8}{15}}. \quad (t = \sqrt{1 - x} \text{ で置換した}) \end{aligned}$$

置換せずに, $x\sqrt{1 - x} = \{1 - (1 - x)\}\sqrt{1 - x} = (1 - x)^{1/2} - (1 - x)^{3/2}$ と変形してもよい.

4 累次積分の積分順序を交換する問題

$$(1) D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2 - x\} \text{ とおくと } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2 - x} f(x, y) dy \text{ となる. } D \text{ を } y \text{ に関して単純な領域とみなすと, 次の } D_1 \text{ と } D_2 \text{ に分割される.}$$

$$D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}, \quad D_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 2 - y\}.$$

よって,

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2 - x} f(x, y) dy &= \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy \\ &= \boxed{\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2 - y} f(x, y) dx}. \end{aligned}$$

(2) $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq x^3\}$ とおくと, $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_1^2 dx \int_{x^2}^{x^3} f(x, y) dy$ となる.

この累次積分の積分順序を交換するとは, x に関して単純な領域 D を y に関して単純な領域 (の幾つかの和集合) として表すことで, $x^2 \leq y \leq x^3$ を x について解くことである. そこで, $x > 0, y > 0$ より, $x^2 \leq y$ と $x \leq \sqrt{y}$ は同値で, $y \leq x^3$ と $\sqrt[3]{y} \leq x$ も同値である. つまり, $x^2 \leq y \leq x^3$ は $\sqrt[3]{y} \leq x \leq \sqrt{y}$ と同値である. また, $1 \leq y \leq 8$ から, $1 \leq \sqrt[3]{y}$ なので, $D = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 8, \sqrt[3]{y} \leq x \leq \min\{\sqrt{y}, 2\}\}$ がわかる. ここで, $\sqrt{y} \leq 2$ と $(1 \leq) y \leq 4$ は同値であるから, D を y に関して単純な領域とみなすと, 次の D_1 と D_2 に分割される.

$$D_1 = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 4, \sqrt[3]{y} \leq x \leq \sqrt{y}\}, \quad D_2 = \{(x, y) \mid 4 \leq y \leq 8, \sqrt[3]{y} \leq x \leq 2\}$$

つまり, $D = D_1 \cup D_2$ と表される. よって,

$$\int_1^2 dx \int_{x^2}^{x^3} f(x, y) dy = \boxed{\int_1^4 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_4^8 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^2 f(x, y) dx}.$$

(3) $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq x \leq 1 + \cos y\}$ とおくと, $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^\pi dy \int_0^{1+\cos y} f(x, y) dx$ となる. x に関して単純な領域とみなすと $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \cos^{-1}(x-1)\}$ なので,

$$\int_0^\pi dy \int_0^{1+\cos y} f(x, y) dx = \boxed{\int_0^2 dx \int_0^{\cos^{-1}(x-1)} f(x, y) dy}.$$

5 2重積分の値を求める問題

(1) $\iint_D \sin\left(\frac{y}{x}\right) dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_0^{\frac{\pi}{2}x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[-x \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 x dx = \boxed{\frac{3}{8}}.$

(2) $\int e^{x^2} dx$ が初等関数でないので, $\int_y^1 e^{x^2} dx$ は計算できないため, 積分順序を交換する.

$$\int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2} dx = \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} e^{x^2}\right)' dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}(e-1)}.$$

6 空間図形の体積を求める問題

(1) 切断面	t の範囲	断面図の式	断面積
平面 $x = t$	$0 \leq t \leq 1$	$ y \leq \sqrt{1-t^2}, 0 \leq z \leq y^2$	$\frac{2}{3}(1-t^2)^{3/2}$
平面 $y = t$	$-1 \leq t \leq 1$	$0 \leq x \leq \sqrt{1-t^2}, 0 \leq z \leq t^2$	$t^2 \sqrt{1-t^2}$
平面 $z = t$	$0 \leq t \leq 1$	$x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq \sqrt{t}$	$\cos^{-1} \sqrt{t} - \sqrt{t(1-t)}$

$$v(V_1) = \int_0^1 \frac{2}{3}(1-t^2)^{3/2} dt = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \cdot \cos \theta d\theta = \frac{2 \cdot 3!!}{3 \cdot 4!!} \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{8}}.$$

$$v(V_1) = \int_{-1}^1 t^2 \sqrt{1-t^2} dt = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos \theta \cdot \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta d\theta = \boxed{\frac{\pi}{8}}.$$

(2) 切断面	t の範囲	断面図の式	断面積
平面 $x = t$	$-1 \leq t \leq 1$	$y^2 + z^2 \leq 1, z \leq \sqrt{1-t^2}$	$2 \cos^{-1} t + 2 t \sqrt{1-t^2}$
平面 $y = t$	$-1 \leq t \leq 1$	$x^2 + z^2 \leq 1, z \leq \sqrt{1-t^2}$	$2 \cos^{-1} t + 2 t \sqrt{1-t^2}$
平面 $z = t$	$-1 \leq t \leq 1$	$ x \leq \sqrt{1-t^2}, y \leq \sqrt{1-t^2}$	$4(1-t^2)$

$$v(V_2) = \int_{-1}^1 4(1-t^2) dt = 4 \cdot 2 \int_0^1 (1-t^2) dt = 8 \left[t - \frac{1}{3} t^3\right]_0^1 = \boxed{\frac{16}{3}}.$$