数学演習第二（演習第 11 回）

線形：線形写像の表現行列，表現行列と座標，基底変換行列

2023 年 1 月 18 日

【要点】

〈線形写像の表現行列〉（線形教科書 pp.155–158）

V, W をベクトル空間，$f\colon V \to W$ を線形写像とし，V の基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ と W の基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m)$ が与えられているとする．このとき，$\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ の像 $f(\boldsymbol{a}_i)$ は $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ の 1 次結合として

$$f(\boldsymbol{a}_i) = a_{1i}\boldsymbol{b}_1 + \cdots + a_{mi}\boldsymbol{b}_m = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m)\begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

のように表される．これら n 個の式をまとめて書くと

$$(f(\boldsymbol{a}_1), \ldots, f(\boldsymbol{a}_n)) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

右辺に現れる $m \times n$ 行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ を $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ **に関する** f **の表現行列**という．

［例］ $\mathbb{R}^3$ の基底として $\mathcal{E}_3 = \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ を考え，$\mathbb{R}^2$ の基底として $\mathcal{E}_2 = \left(\boldsymbol{e}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ を考える (これらはそれぞれ $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ の**標準基底**とよばれる)．このとき，$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \end{bmatrix}$ で線形写像 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を定めれば,

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix},\ f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix},\ f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

となる．まとめて書くと $(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), f(\boldsymbol{e}_3)) = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ であるから，$\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2$ に関する f の表現行列は $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ である．

〈表現行列と座標〉　(線形教科書 pp.158–160)

$f\colon V \to W$ を線形写像とし，V の基底 $\mathcal{A}$ と W の基底 $\mathcal{B}$ に関する f の表現行列を A とする．このとき，$\boldsymbol{a} \in V$ の $\mathcal{A}$ に関する座標を $[\boldsymbol{a}]_{\mathcal{A}}$, またその像 $f(\boldsymbol{a}) \in V$ の $\mathcal{B}$ に関する座標を $[f(\boldsymbol{a})]_{\mathcal{B}}$ とすると，

$$[f(\boldsymbol{a})]_{\mathcal{B}} = A[\boldsymbol{a}]_{\mathcal{A}}$$

が成り立つ．($\dim V = n, \dim W = m$ とすると，$[\boldsymbol{a}]_{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^n, [f(\boldsymbol{a})]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^m$ で，A は $m \times n$ 行列となる．)

〈基底変換行列〉　(線形教科書 pp.162–164)

ベクトル空間 V の 2 つの基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n), \mathcal{A}' = (\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_n)$ に対して，$\boldsymbol{a}'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の 1 次結合として

$$\boldsymbol{a}'_i = p_{1i}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + p_{ni}\boldsymbol{a}_n = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)\begin{bmatrix} p_{1i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix} \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

のように表される．これら n 個の式をまとめて書くと

$$(\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_n) = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

右辺に現れる $n \times n$ 行列 $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$ を **$\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}'$ への基底変換行列**という．

このとき，$\boldsymbol{a} \in V$ の $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ に関する座標をそれぞれ $[\boldsymbol{a}]_{\mathcal{A}}, [\boldsymbol{a}]_{\mathcal{A}'}$ とすると，

$$[\boldsymbol{a}]_{\mathcal{A}} = P[\boldsymbol{a}]_{\mathcal{A}'}$$

が成り立つ．また，P は正則行列で，$\mathcal{A}'$ から $\mathcal{A}$ への基底変換行列は P^{-1} である．

〈基底の変換と表現行列〉　(線形教科書 pp.164–166)

- $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ を V の基底とし，$\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}'$ への基底変換行列を P とする．
- $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ を W の基底とし，$\mathcal{B}$ から $\mathcal{B}'$ への基底変換行列を Q とする．
- $f\colon V \to W$ を線形写像とし，$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に関する f の表現行列を A とする．

このとき，$\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ に関する f の表現行列を A' とすると，

$$A' = Q^{-1}AP$$

が成り立つ．

演習問題

1 (1) 次で与えられる $\mathbb{R}^2$ の基底 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ について，$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列を求めよ．

$$\mathcal{A}=\left(\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right),\qquad \mathcal{B}=\left(\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)$$

(2) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0\right\}$ に対して，2 つの基底

$$\mathcal{A}=\left(\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right),\qquad \mathcal{B}=\left(\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right)$$

を考える．

(i) $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列を求めよ．

(ii) $\boldsymbol{x}\in W$ の $\mathcal{B}$ に関する座標 $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ が $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ のとき，$\mathcal{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{A}}$ を a,b で表せ．

2 次で与えられる $\mathbb{R}^3$ のベクトルを考える．

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}1\\5\\18\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_3=\begin{bmatrix}-7\\1\\0\end{bmatrix}$$

(1) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ に関する $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ の座標を求めよ．

(2) 線形写像 $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ を次で定義する．

$$f(\boldsymbol{a}_1)=\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix},\quad f(\boldsymbol{a}_2)=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix},\quad f(\boldsymbol{a}_3)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$ の基底 $\mathcal{F}=\left(\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)$ を考え，$\mathcal{F}$ に関する $f(\boldsymbol{a}_1),f(\boldsymbol{a}_2),f(\boldsymbol{a}_3)$ の座標を求めることにより，$\mathcal{A},\mathcal{F}$ に関する f の表現行列 A を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)$ を考え，$\mathcal{B},\mathcal{F}$ に関する f の表現行列 B を求めよ．

(4) 線形写像 $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ を

$$g\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-x-2y\\-4x-4y\\5x+12y\end{bmatrix}$$

で定義する．$\mathcal{F},\mathcal{A}$ に関する g の表現行列 M を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ ベクトル空間 V の基底 $\mathcal{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ とベクトル空間 W の基底 $\mathcal{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4)$ に対して，線形写像 $f\colon V\to W$ を

$$f(\boldsymbol{a}_1)=-\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_3+\boldsymbol{b}_4,\quad f(\boldsymbol{a}_2)=3\boldsymbol{b}_1+3\boldsymbol{b}_3-3\boldsymbol{b}_4,\quad f(\boldsymbol{a}_3)=-2\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2-2\boldsymbol{b}_3+2\boldsymbol{b}_4$$

で定義する．

(1) $\mathcal{A},\mathcal{B}$ に関する f の表現行列 A を求めよ．

(2) A を用いて (例えば A を簡約化して)，$\mathrm{Ker}\,f$ の基底と次元を求めよ．また，$\mathrm{Im}\,f$ の基底と次元を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 2 次以下の実数係数 1 変数多項式全体 (変数 x) のなすベクトル空間を $\mathbb{R}[x]_2$ とかく．線形変換 $L\colon \mathbb{R}[x]_2\to\mathbb{R}[x]_2$ を次で定義する．(第 9 回の $\boxed{\mathbf{4}}$ の D と同じ写像)

$$L(p(x))=2p(x)-(x+1)p'(x)\quad (p(x)\in\mathbb{R}[x]_2)$$

(1) $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $\mathcal{A}=(1,x,x^2)$ に関する L の表現行列 A を求めよ．

(2) $\mathbb{R}[x]_2$ の別の基底 $\mathcal{B}=(1+x,x+x^2,x^2)$ に関する L の表現行列を求めよ．

レポート課題

- **答だけでなく，計算の過程も**書いて下さい（A4 **用紙１～２枚**, pdf ファイルで提出）
- 授業に出席し, レポートを授業翌日までに **WebClass に提出** して「出席」となります

$\boxed{\mathbf{0}}$ $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ を次の通りとする．

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}7\\9\\2\end{bmatrix}$$

$W=\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\rangle$ ($\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が生成する $\mathbb{R}^3$ の部分空間) とするとき，$\mathcal{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$, $\mathcal{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$ はいずれも W の基底となる．以下の問いに答えよ．

(1) 基底 $\mathcal{A}$ に関する $\boldsymbol{a}_3$ の座標 $[\boldsymbol{a}_3]_{\mathcal{A}}$ を求めよ．

(2) 基底 $\mathcal{A}$ から基底 $\mathcal{B}$ への基底変換行列 P を求めよ．

ここで，W から W 自身への線形写像 (W の線形変換) $f:W\to W$ を次式で定める．

$$f(\boldsymbol{a}_1)=f(\boldsymbol{a}_2)=\boldsymbol{a}_3$$

(3) 基底 $\mathcal{A}$ に関する f の表現行列 F を求めよ．

(4) 基底 $\mathcal{B}$ に関する f の表現行列 F' を F と P を用いて表し，また具体的に求めよ．