数学演習第二 (第 11 回) 【解答例】

線形：線形写像の表現行列，表現行列と座標，基底変換行列　2023 年 1 月 18 日

演習問題

1 (1) $[\boldsymbol{b}_1,\,\boldsymbol{b}_2] = [\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2]P$ であるから (下の［記法に関する注意］を参照),

$$P = [\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2]^{-1}[\boldsymbol{b}_1,\,\boldsymbol{b}_2] = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

(2) (i) $[\boldsymbol{b}_1,\,\boldsymbol{b}_2] = [\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2]\,P$ となる P を求めるには，$[\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2)$ なる c_1, c_2 を求めればよい. 言い換えると, $P = \big[\,[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}},\ [\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}}\,\big]$ である.

$$[\,\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2 \mid \boldsymbol{b}_1,\,\boldsymbol{b}_2\,] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

より, $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$, $[\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ とわかるから, $P = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(ii) 座標の間の関係は $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{A}} = P\,[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ で与えられるから,

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{A}} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3a + 2b \\ -a + b \end{bmatrix}.$$

［記法に関する注意］ (1 次結合の記法)

ベクトル空間 V, W および V の基底 $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$, W の基底 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m\}$ が与えられているとする $(\dim V = n, \dim W = m)$. このとき，【要点】で述べたことの繰り返しになるが,

- $\boldsymbol{v} \in V$ の基底 $\mathcal{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}}$ とは $\underbrace{(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}}}_{\text{一次結合の記法}} = \boldsymbol{v}$ によって唯一つ定まる $\mathbb{R}^n$ の列ベクトル $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^n$ のことをいう.
- 線形写像 $f\colon V \to W$ の基底 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に関する表現行列とは $(f(\boldsymbol{a}_1), \ldots, f(\boldsymbol{a}_n)) = \underbrace{(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m)A}_{\text{一次結合の記法}}$ によって唯一つ定まる $m \times n$ 行列 A のことをいう.

ここで, $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ や $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m)$ は行列ではないが, 一次結合の記法の定義に立ち返って考えれば, V が $\mathbb{R}^{n_1}$ の部分空間のときには, $\boldsymbol{v} \in V \subset \mathbb{R}^{n_1}$ に対して,

$$(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}} = \boldsymbol{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{[\boldsymbol{a}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n]}_{n_1 \times n\ \text{行列}}[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}} = \boldsymbol{v}.$$

更に, W が $\mathbb{R}^{m_1}$ の部分空間であれば,

$$(f(\boldsymbol{a}_1), \ldots, f(\boldsymbol{a}_n)) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m)A \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{[f(\boldsymbol{a}_1),\,\ldots,\,f(\boldsymbol{a}_n)]}_{m_1 \times n\ \text{行列}} = \underbrace{[\boldsymbol{b}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{b}_m]}_{m_1 \times m\ \text{行列}}A.$$

ここで, $[\boldsymbol{a}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n]$ は列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^{n_1}$ を並べてできる $n_1 \times n$ 行列を表す (線形教科書では $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ の形が用いられている). $[\boldsymbol{b}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{b}_m]$, $[f(\boldsymbol{a}_1),\,\ldots,\,f(\boldsymbol{a}_n)]$ についても同様.
なお, 上では基底変換行列に関しての記述を省略したが, もちろん同様な事実が成り立つ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)[\boldsymbol{b}_i]_{\mathcal{A}} = \boldsymbol{b}_i$ より, $[\boldsymbol{b}_i]_{\mathcal{A}} = [\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_3]^{-1}\boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. これを行基本変形を用いてまとめて計算しよう.

$$[\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_3 \mid \boldsymbol{b}_1,\, \boldsymbol{b}_2,\, \boldsymbol{b}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 18 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & -5 & 4 & 3 & 15 \\ 0 & -5 & -7 & 2 & 15 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 7 & 7 & 23 \\ 0 & 1 & 5 & -4 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & 18 & -18 & 0 & -54 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

であるから, $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $[\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[\boldsymbol{b}_3]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$.

(2) $\mathcal{A}, \mathcal{F}$ に関する f の表現行列 A は $[f(\boldsymbol{a})]_{\mathcal{F}} = A[\boldsymbol{a}]_{\mathcal{A}}$ $(\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3)$ を満たす. 特に, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ と選べば, $[f(\boldsymbol{a}_i)]_{\mathcal{F}} = A[\boldsymbol{a}_i]_{\mathcal{A}} = A\boldsymbol{e}_i$ であるから,

$$A = \bigl[A\boldsymbol{e}_1,\, A\boldsymbol{e}_2,\, A\boldsymbol{e}_3\bigr] = \bigl[[f(\boldsymbol{a}_1)]_{\mathcal{F}},\, [f(\boldsymbol{a}_2)]_{\mathcal{F}},\, [f(\boldsymbol{a}_3)]_{\mathcal{F}}\bigr].$$

座標の定義から, 各 $[f(\boldsymbol{a}_i)]_{\mathcal{F}}$ は $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)[f(\boldsymbol{a}_i)]_{\mathcal{F}} = [\boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2][f(\boldsymbol{a}_i)]_{\mathcal{F}} = f(\boldsymbol{a}_i)$ を満たすので, $[f(\boldsymbol{a}_i)]_{\mathcal{F}} = [\boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2]^{-1}f(\boldsymbol{a}_i)$ で与えられる. よって,

$$\begin{aligned} A &= \bigl[[f(\boldsymbol{a}_1)]_{\mathcal{F}},\, [f(\boldsymbol{a}_2)]_{\mathcal{F}},\, [f(\boldsymbol{a}_3)]_{\mathcal{F}}\bigr] = [\boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2]^{-1}[f(\boldsymbol{a}_1),\, f(\boldsymbol{a}_2),\, f(\boldsymbol{a}_3)] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

【注意】表現行列 A を求めるだけなら次のように考えてもよい (具体的な計算は同じ). $\mathcal{A}, \mathcal{F}$ に関する f の表現行列 A は $(f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), f(\boldsymbol{a}_3)) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)A$ で与えられるから,

$$A = [\boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2]^{-1}[f(\boldsymbol{a}_1),\, f(\boldsymbol{a}_2),\, f(\boldsymbol{a}_3)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

もちろん, (1) と同様に $[\boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2 \mid f(\boldsymbol{a}_1),\, f(\boldsymbol{a}_2),\, f(\boldsymbol{a}_3)]$ を行基本変形しても計算できるが, 2 次正方行列の逆行列は簡単に求まるので, $[\boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2]$ の逆行列を用いて計算した.

(3) f の線形性と (1) から, $f(\boldsymbol{b}_1) = f(\boldsymbol{a}_2) - f(\boldsymbol{a}_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $f(\boldsymbol{b}_2) = 7f(\boldsymbol{a}_1) - 3f(\boldsymbol{a}_2) = \begin{bmatrix} 26 \\ -4 \end{bmatrix}$, $f(\boldsymbol{b}_3) = 2f(\boldsymbol{a}_1) - 3f(\boldsymbol{a}_3) = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$. よって, $\mathcal{B}, \mathcal{F}$ に関する f の表現行列は, (2) と同様に,

$$B = [\boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2]^{-1}[f(\boldsymbol{b}_1),\, f(\boldsymbol{b}_2),\, f(\boldsymbol{b}_3)] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 26 & 7 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 4 \\ 1 & 15 & 3 \end{bmatrix}.$$

(4) $\mathcal{F}, \mathcal{A}$ に関する g の表現行列 M は $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)M = (g(\boldsymbol{v}_1), g(\boldsymbol{v}_2))$ で与えられるから, $M = [\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_3]^{-1}[g(\boldsymbol{v}_1),\, g(\boldsymbol{v}_2)]$. これを (1) と同様に行基本変形により計算しよう.

$$[\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_3 \mid g(\boldsymbol{v}_1),\, g(\boldsymbol{v}_2)] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -8 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 17 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & -2 \\ 0 & -5 & -7 & 26 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 18 & 36 & 0 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

であるから, $M = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -8 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 表現行列の定義から, $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ である.

(2) A を簡約化すると $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となるので,

- $N(A)$ の基底の一例として $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ が取れ, 次元は $\dim N(A) = 1$.
- $C(A)$ の基底の一例として $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ (あるいは $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$) が取れ, 次元は $\dim C(A) = 2$ (後者の基底は A を列に関して簡約化して得られる).

これを V, W の元として書けば,

- $\mathrm{Ker}\, f$ の基底として $(3\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)$ が取れ, 次元は $\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$.
- $\mathrm{Im}\, f$ の基底として $(-\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_4, -2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 - 2\boldsymbol{b}_3 + 2\boldsymbol{b}_4)$ が取れ, 次元は $\dim \mathrm{Im}\, f = 2$. なお, $\mathrm{Im}\, f$ の基底はもう少し簡単な $(\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{b}_4,\ \boldsymbol{b}_2)$ を選ぶこともできる.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $L(1) = 2$, $L(x) = x - 1$, $L(x^2) = -2x$ より, $\mathcal{A}$ に関する L の表現行列は $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(2) $L(1+x) = 1 + x$, $L(x + x^2) = -(1 + x)$, $L(x^2) = -2(x + x^2) + 2x^2$ より, $\mathcal{B}$ に関する L の表現行列は $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ を用いて, $P^{-1}AP$ を計算してもよい.

レポート問題

$\boxed{\mathbf{0}}$ (1), (2) では $\boldsymbol{a}_3$ および $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の一次結合で表すので, まとめて行変形をしてみると,

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -7 & -12 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

この変形から

$$\boldsymbol{a}_3 = -5\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2 \quad \text{と} \quad \begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = \ \ -7\boldsymbol{a}_1 + 4\boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{b}_2 = -12\boldsymbol{a}_1 + 7\boldsymbol{a}_2 \end{cases} \quad \text{つまり} \quad (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)\begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

が得られる. よって, 基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ に対して,

(1) $[\boldsymbol{a}_3]_{\mathcal{A}} = \boxed{\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}}$. (2) $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列は $P = \boxed{\begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}}$.

(3) 与えられた条件と (1) の結果から $f(\boldsymbol{a}_1) = f(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{a}_3 = -5\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2$ なので,

$$(f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2)) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)\begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

よって, 基底 $\mathcal{A}$ に関する f の表現行列は $F = \boxed{\begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}}$.

(4) $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列が P, $\mathcal{A}$ に関する f の表現行列が F であるから, $\mathcal{B}$ に関する f の表現行列 F' は

$$F' = \boxed{P^{-1}FP}$$

で与えられる. これを計算すると,

$$\begin{aligned} F' &= \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}}. \end{aligned}$$