数学演習第二（演習 第12回）

微積：重積分 [2]（重積分の変数変換）

2023年1月25日

- 要点もよく読んでください.
- レポート課題 (最後のページ) の答案には, 答えだけでなく途中の計算も書いてください.

【要点】

■ 定積分の変数変換

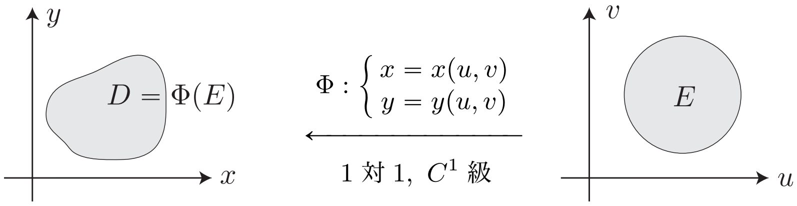
$I, J \subset \mathbb{R}$ を閉区間とする. 単調な C^1 級関数 $x = \varphi(t) : J \to I := \varphi(J)$ を考え, I 上で連続な関数 $f(x)$ に対する定積分を $x = \varphi(t)$ によって置換すると

$$\boxed{\int_I f(x)\,dx = \int_J f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,dt}$$

が成り立つ. この形で表した置換積分の公式 (**変数変換の公式**) は重積分の場合に拡張される.

■ 重積分 (= 2 重積分) の変数変換

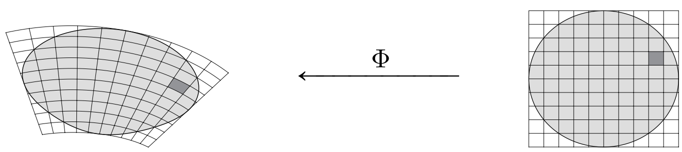
$D, E \subset \mathbb{R}^2$ を "面積をもつ" 有界閉領域とし, C^1 級写像 $\Phi : E \to D = \Phi(E)$ により,



と対応しているとする. この写像 $\Phi : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ に対して,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

を (x, y) の (u, v) に関する**ヤコビアン** (Jacobian) あるいは**ヤコビ行列式** (Jacobian determinant) という. ヤコビアンの絶対値は Φ によって移される微小部分の面積の拡大率を表し, ヤコビアンの符号は Φ によって領域が裏返るか否かを表す (負のとき裏返る).



ヤコビアンを用いて重積分の**変数変換の公式**が次で与えられる: D 上で連続な関数 $f(x, y)$ に対して,

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv}$$

が成り立つ.

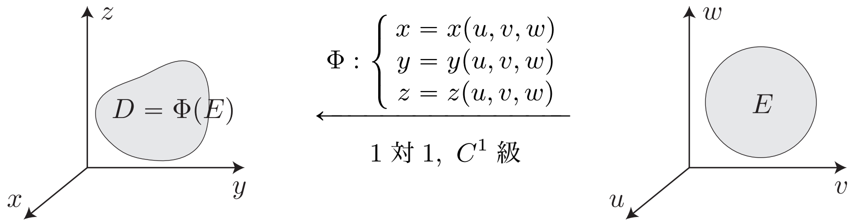
《注》 重積分の変数変換の公式を述べる際に, 通常は変換のヤコビアンに対して

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0 \qquad ((u,v) \in E)$$

を仮定するが, 写像 $\Phi : E \to D = \Phi(E)$ が C^1 級で 1 対 1 であればヤコビアンが 0 となる点 (u, v) の集合 Z の像 $\Phi(Z) \subset D$ は面積 0 となり, ヤコビアンに対するこの仮定がなくても上の公式が成り立つことが知られている. 実は, 更に E の面積 0 の部分集合 N 上で Φ の 1 対 1 や C^1 級という条件が崩れていても, 変数変換の公式はそのまま成り立つ ($N \subset \partial E$ の場合に比較的よく起こる).

■ 3 重積分の変数変換

$D, E \subset \mathbb{R}^3$ が "体積をもつ" 有界閉領域で, C^1 級写像 $\Phi : E \to D = \Phi(E)$ により,



と対応しているとする. このとき, D 上で連続な関数 $f(x, y, z)$ に対して,

$$\boxed{\iiint_D f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_E f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dudvdw}$$

が成り立つ. ここで, (x, y, z) の (u, v, w) に関するヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ は

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

で与えられ, その絶対値は Φ によって移される微小部分の体積の拡大率を表す.

■ よく用いられる変数変換

1 次変換 $\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases}$ $(a, b, c, d$ は定数, $ad - bc \neq 0)$.

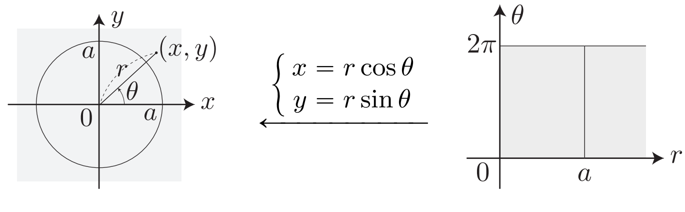
Jacobian は $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc\ (\neq 0)$.

極座標変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\begin{pmatrix} r \geqslant 0 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{pmatrix}$

※ $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ で考えることも多い

Jacobian は

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\ (\geqslant 0).$$

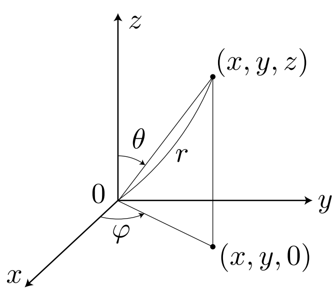


空間の極座標変換 $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $\begin{pmatrix} r \geqslant 0 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \end{pmatrix}$

※ $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$ で考えることも多い.

Jacobian は

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta\ (\geqslant 0).$$



【演習問題】

1 次のヤコビアンを求めよ.

(1) $\begin{cases} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{cases}$ $(a, b, c, d$ は $ad - bc \neq 0$ を満たす定数$)$ であるとき, $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ を求めよ.

(2) $\begin{cases} x + y = u \\ \quad y = uv \end{cases}$ であるとき, $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ を求めよ.

(3) $\begin{cases} x = ar\cos^n\theta \\ y = br\sin^n\theta \end{cases}$ $(a, b$ は正定数, n は自然数$)$ であるとき, $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

(4) $\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$ $(a, b, c$ は正定数$)$ であるとき, $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}$ を求めよ.

2 次の重積分の値を求めよ.

(1) $I_1 = \displaystyle\iint_D x\log(x + y)\,dxdy,$ $\quad D:\ 1 \leqslant x + y \leqslant 2,\ |x - y| \leqslant 1.$ $\quad(u = x + y,\ v = x - y$ とおく$)$

(2) $I_2 = \displaystyle\iint_D \frac{(2x - y)^2}{1 + (x + y)^4}\,dxdy,$ $\quad D:\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 1.$ $\quad(u = x + y,\ v = 2x - y$ とおく$)$

(3) $I_3 = \displaystyle\iint_D (x + y)^2\,dxdy,$ $\quad D: x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$ $\quad$(演習書 問題 6.2.2 (1) 類題)

(4) $I_4 = \displaystyle\iint_D \sqrt{xy}\,dxdy,$ $\quad D:\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 1.$ $\quad$(演習書 問題 6.2.2 (2) 参照)

(5) $I_5 = \displaystyle\iint_D xy\,dxdy,$ $\quad D:\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant 1.$ $\quad$(演習書 問題 6.2.2 (3) 参照)

(6) $I_6 = \displaystyle\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy,$ $\quad D:\ x^2 + y^2 \leqslant x.$

(7) $I_7 = \displaystyle\iint_D x\,dxdy,$ $\quad D:$ 曲線 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t\cos t \end{cases}$ $\left(0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた部分.

3 次の 3 重積分の値を求めよ. ただし, p は実数とし, $0 < a < b$ とする.

(1) $J_1 = \displaystyle\iiint_V xyz\,dxdydz,$ $\quad V:\ 0 \leqslant x + y \leqslant 1,\ 0 \leqslant y + z \leqslant 1,\ 0 \leqslant z + x \leqslant 1.$

(2) $J_2 = \displaystyle\iiint_V xz\,dxdydz,$ $\quad V:\ x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ x \leqslant z \leqslant 2x.$

(3) $J_3 = \displaystyle\iiint_V \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}\,dxdydz,$ $\quad V:\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1.$

(4) $J_4 = \displaystyle\iiint_V \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{p/2}},$ $\quad V:\ a^2 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant b^2.$

4 次の面積あるいは体積を求めよ.

(1) 曲線 $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ で囲まれた部分の面積. (微積教科書 p.121 4. (2))

(2) a, b が正定数のとき, 曲線 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{x}{b}\right)^{2/3} = 1$ で囲まれた部分の面積. (ヒント: $x = ar\cos^3\theta$, $y = br\sin^3\theta$ とおいて考えよ.)

(3) 円錐面 $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ と平面 $z = 0$ の囲まれた部分のうち, 円柱面 $x^2+y^2 = x$ の内側にある部分の体積. (ヒント: 体積を x, y に関する重積分の形に表し, 原点を中心とする極座標変換を用いよ.)

(4) 放物面 $z = 1 - x^2 - y^2$ と平面 $z = 2x$ で囲まれた部分の体積, およびその部分のうち $x \geqslant 0$ の範囲にある部分の体積. (ヒント: 体積を x, y に関する重積分の形に表し, 点 $(-1, 0)$ を中心とする極座標変換を用いよ.)

(5) 曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2 = z$ で囲まれた部分の体積. (ヒント: まず曲面を空間の極座標 (r, θ, φ) を用いて表せ.)

【レポート課題】(オンライン提出)

レ 次の (1) から (3) については重積分を計算し, (4) については面積を求めよ.

(1) $I = \displaystyle\iint_D \frac{x+y}{1+(x-y)^2}\,dxdy, \quad D: 0 \leqslant y \leqslant x,\ x+y \leqslant 1.$

(2) $J = \displaystyle\iint_D (x+2y)^2\,dxdy, \qquad D: 0 \leqslant x \leqslant y,\ x^2+y^2 \leqslant a^2.$

(3) $K = \displaystyle\iiint_V x^2yz\,dxdydz, \qquad V: y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2.$

(4) 曲線 $(x^2+y^2)^3 = x^2$ で囲まれた部分の面積.