数学演習第二 (演習第13回)

線形：行列と線形変換の固有値，表現行列の対角化

2023 年 2 月 1 日

- $\boxed{\textbf{授業中の演習問題}}$ は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ の 4 問です. $\boxed{\textbf{レポート課題}}$ は $\boxed{3}$ の 4 問です.
- それ以外の問題は自習用問題です (こちらも是非解いて下さい).
- 要点もよく読くこと．レポート課題の答案には**答えだけでなく途中の計算も書いて下さい**.

【要点】

〈正方行列の固有値と固有ベクトル〉 (線形教科書 pp. 87–88)

複素数 λ が n 次の複素数成分の正方行列 A の**固有値** (eigenvalue) であるとは，零ベクトル $\mathbf{0}$ でない，n 次のある列ベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して，等式 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ をみたすときをいう．このとき，列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を λ に対する A の**固有ベクトル** (eigenvector) であるという．A の固有値は，λ の n 次方程式 $\det(\lambda E_n - A) = 0$ の解と一致するので，この方程式を解けばよい．また，λ に対する A の固有ベクトルは，同次連立 1 次方程式 $(\lambda E_n - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の非自明な解 $\boldsymbol{x}$ であるから，係数行列 $\lambda E_n - A$ を簡約化すればよい．

例えば，$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ に対して，$\det(\lambda E_2 - A) = (\lambda - 1)^2 + 1$ より，$\lambda = 1 \pm i$ が A のすべての固有値である．そして，$(1+i)E_2 - A = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ から，$1 + i$ に対する A の固有ベクトルの 1 つは $\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ である．また，同様にして，$1 - i$ に対する A の固有ベクトルの 1 つは $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ であることがわかる．

〈線形変換の固有値と固有ベクトル〉 (線形教科書 pp. 167–168)

V を任意のベクトル空間とする．複素数 λ が線形変換 $f\colon V \to V$ の**固有値** (eigenvalue) であるとは，等式 $f(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$ をみたす零ベクトル $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ が存在するときをいい，このような $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ を λ に対する f の**固有ベクトル** (eigenvector) という．また，V の部分空間 $V_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in V \mid f(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}\}$ を λ に対する f の**固有空間** (eigenspace) という．V が有限次元のとき，V の基底 $\mathcal{A}$ に関する f の表現行列を A とすると，f の固有値は A の固有値である．よって，A の固有値を求めればよい．また，$\mathbb{R}^n$ の基底 $\mathcal{A}$ は何でもよいので，表現行列を**標準行列** (p. 156) として固有値を求めてもよい．

〈正方行列と線形変換の対角化可能性〉 (線形教科書 pp. 91, 169)

n 次の正方行列 A が**対角化可能** (diagonalizable) であるとは，ある正則行列 P が存在して，$P^{-1}AP$ が対角行列にできるときをいう．その必要十分条件は，n 個の 1 次独立な固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ が存在することで，$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ の固有値をそれぞれ $\mu_1, \ldots, \mu_n$ とすると，$P = [\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{p}_n]$ にとれ，対角行列 $P^{-1}AP$ の対角成分はそれぞれ $\mu_1, \ldots, \mu_n$ になる (p. 92)． ここで，$\mu_1, \ldots, \mu_n$ が異なっている必要はない．例えば，$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ に対して，固有ベクトル $\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ は 1 次独立で，$P = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ とすると，$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}$ である．P^{-1} を計算する必要はない．V の線形変換 f が**対角化可能**であるとは，f の基底 $\mathcal{A}$ に関する表現行列 A が対角化可能になる，V の基底 $\mathcal{A}$ が存在するときをいう．

【授業中の演習問題】

$\boxed{1}$ 次の正方行列 A について以下の問いに答えよ．

$$\text{(a)}\ \ A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & -3\end{bmatrix}\qquad \text{(b)}\ \ A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 4\end{bmatrix}\qquad \text{(c)}\ \ A=\begin{bmatrix}0 & -4 & 4\\ 2 & 6 & -4\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

(1) A の固有多項式 $F_A(\lambda)$ および 固有値を求めよ．

(2) A の各固有値 λ に対して, 固有空間 V_λ の基底の 1 つを求めよ．

(3) A が対角化可能かどうかを調べ, 対角化可能ならば A を対角化せよ ($P^{-1}AP$ が対角行列となるような 正則行列 P および対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ).

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ (b) の A に対して，ベクトル値関数 $\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}$ に対する斉次線形微分方程式 $\boldsymbol{x}'(t)=A\boldsymbol{x}(t)$ の一般解を求めよ．（ヒント：$P^{-1}AP$ が対角行列となるような 正則行列 P を構成し，$\boldsymbol{y}(t)=P^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ とおいて，$\boldsymbol{y}(t)$ に関する斉次線形微分方程式に変換して解く．）

【レポート課題：オンライン提出】

- **答だけでなく，計算の過程も**書いて下さい．（A4 **用紙１〜２枚**にまとめ, pdf ファイルに変換して提出)
- 授業に出席し, レポートを授業翌日までに **WebClass に提出** して「出席」となります．

$\boxed{3}$ 正方行列

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

を用いて，$f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ で定義される線形変換 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ について，以下の問いに答えよ．

(1) f の固有値をすべて求めよ．

(2) f の各固有値 λ に対して，f の**固有空間** $V_\lambda=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\mid f(\boldsymbol{x})=\lambda\boldsymbol{x}\}$ の基底（つまり，同次連立 1 次方程式 $(\lambda E_3-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の**基本解**）の 1 つを求めよ．

(3) f は対角化可能でないことを示せ．

(4) ベクトル値関数 $\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}$ に対する斉次線形微分方程式 $\boldsymbol{x}'(t)=A\boldsymbol{x}(t)$ の一般解を求めよ．（ヒント：固有空間に属さない列ベクトル，例えば $\boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ と 1 次独立な固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ を結合させて，正則行列 $P=[\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3]$ を構成すると，$P^{-1}AP$ が三角行列になることを利用して，$\boldsymbol{y}(t)=P^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ とおいて，$\boldsymbol{y}(t)$ に関する斉次線形微分方程式に変換して解く．）

【それ以外の自習用問題】

4 次の正方行列 A について以下の問いに答えよ.

$$\text{(a)}\ A=\begin{bmatrix}8&-9\\6&-7\end{bmatrix}\qquad \text{(b)}\ A=\begin{bmatrix}4&-1&5\\1&2&3\\-1&1&0\end{bmatrix}\qquad \text{(c)}\ A=\begin{bmatrix}-1&2&1\\-4&5&2\\4&-4&-1\end{bmatrix}$$

(1) A の固有多項式 $F_A(\lambda)$ および 固有値を求めよ.

(2) A の各固有値 λ に対して, 固有空間 V_λ の基底の 1 つを求めよ.

(3) A が対角化可能かどうかを調べ, 対角化可能ならば A を対角化せよ ($P^{-1}AP$ が対角行列となるような 正則行列 P および対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ).

5 同じサイズの正方行列 A, B に対して，λ が AB の固有値ならば，λ は BA の固有値でもあることを示せ．（ヒント：$\lambda=0$ の場合とそうでない場合に分けて考えよ．一般に，$AB\neq BA$ であるにも拘わらず，等式 $F_{AB}(\lambda)=F_{BA}(\lambda)$ は成り立つが，この等式を用いる必要性はなく，固有値の定義を使い，**任意のスカラーは任意の行列と可換**であることに注意せよ．）

6 A が複素数成分の n 次正方行列のとき, $\mathbb{C}^n$ の線形変換 $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$) が対角化可能 (すなわち, $\mathbb{C}^n$ の基底を適切に選べば表現行列が対角行列になる) であるための条件を調べる. $\mathbb{C}^n$ の基底 $\mathcal{B}=(\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n)$ に関する f の表現行列が対角行列 $D=\begin{bmatrix}\mu_1&&O\\&\ddots&\\O&&\mu_n\end{bmatrix}$ ($\mu_1,\dots,\mu_n\in\mathbb{C}$) となると仮定して, 以下の問いに答えよ.

(1) 表現行列の定義に即して, 各 k ($1\leqq k\leqq n$) について, μ_k は A の固有値 ($=f$ の固有値), $\boldsymbol{p}_k$ は μ_k に対する固有ベクトルとなることを示せ.

(2) $P=[\,\boldsymbol{p}_1\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n\,]$ ($\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n$ を並べてできる n 次正方行列) とおくとき, $P^{-1}AP=D$ が成り立つことを示せ.

(3) A の固有多項式 ($=f$ の固有多項式) $F_A(\lambda)=|\lambda E_n-A|$ を求めよ. (結果として, 各 μ_k は固有方程式 $F_A(\lambda)=0$ の解であることが分かる.)

(4) $\mu\in\mathbb{C}$ を A の任意の固有値とする. このとき, μ は $\mu_1,\dots,\mu_n$ のいずれかと一致し, 固有方程式 $F_A(\lambda)=0$ の解としての μ の重複度 (固有値 μ の代数的重複度と呼ぶ) と, μ に対する A の固有空間 ($=f$ の固有空間) $V_\mu=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n\mid A\boldsymbol{x}=\mu\boldsymbol{x}\}$ の次元が等しくなることを示せ.

【注意】上の問題は「線形代数学の教科書の定理 13.7 の必要性の証明」に対応している. 命題 13.6 と併せて, $\mathbb{C}^n$ の線形変換 $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ (あるいは行列 A) が対角化可能であるための必要十分条件は次の条件が成り立つことである:

- A の各固有値 μ に対して, (固有値 μ の代数的重複度) $=$ (固有空間 V_μ の次元).

上の議論を逆に辿れば対角化の手順が了解される (線形教科書 p. 93 参照).

7 正方行列の**同時対角化**に関する次のことをそれぞれ証明せよ．

(1) 2つの正方行列 A, B がともに同じ正則行列 P で対角化可能，つまり $P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$ がともに対角行列になれば，$AB = BA$ をみたす．

(2) A, B が同じサイズの複素数成分の正方行列で，かつ A の固有値は**すべて異なる**と仮定する．このとき，$AB = BA$ が成り立てば，$P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$ がともに対角行列になるような正則行列 P が存在する．

8 $\boxed{3}$ に倣って，**線形漸化式**で定義される数列のベクトル空間の線形変換が対角化可能でない場合を扱う．線形代数学の教科書の**命題 25.1** のように，p, q を 0 でない複素数とし，線形漸化式

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定められる複素数の数列 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ 全体が作るベクトル空間を W とする：

$$W = \{\ \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots)\ \mid\ a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n\ (n = 1, 2, 3, \dots)\ \}.$$

$f(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_2, a_3, a_4, \dots)$ で定義される線形変換 $f : W \to W$ について，以下の問いに答えよ．適宜，線形代数学の教科書の 170–172 頁を参照すること．例えば，$\boldsymbol{c}_1 = (1, 0, q, \dots)$, $\boldsymbol{c}_2 = (0, 1, p, \dots)$ とおくと，$(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2)$ は W の 1 つの基底である (補題 25.2)．特に，$\dim W = 2$ である．ここで考えるのは，基底 $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2)$ に関する f の表現行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{bmatrix}$ の固有方程式が 2 重解 α をもつ場合で，$F_A(\lambda) = \lambda^2 - p\lambda - q = (\lambda - \alpha)^2$ のときである．このとき，$V_\alpha = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \right\rangle$ より，$\dim V_\alpha = 1$ なので，f は対角化可能でない．

(1) そこで，W の別な基底 $(\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1 + \alpha\boldsymbol{c}_2)$ をとって，A を三角化する．つまり，

$$(f(\boldsymbol{c}_2), f(\boldsymbol{c}_1 + \alpha\boldsymbol{c}_2)) = (\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1 + \alpha\boldsymbol{c}_2) \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

が成り立つことを導け．

(2) $n \geqq 2$ のとき，$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}^n$ を求めよ．

(3) 複素数列 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ の一般項 a_n $(n \geqq 1)$ を求めよ．つまり，a_n $(n \geqq 3)$ を a_1, a_2, p, n の式で表せ．