

数学演習第二 (演習第 13 回) 【解答例】

線形：行列と線形変換の固有値、表現行列の対角化 2023 年 2 月 1 日

【授業中の演習問題の解答例】

1 (a) について

(1) $F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -4 \\ 1 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$. A の固有値は $\lambda = -2, 1$.

(2) $\lambda = -2$ に対して: $-2E - A = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(-2E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって, V_{-2} の基底は $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. $\lambda = 1$ に対して: $E - A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって, V_1 の基底は $\left(\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

(3) $P = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) について

(1) $F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -1 & \lambda - 2 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 3) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2(\lambda - 1)$. A の固有値は $\lambda = 1, 3$.

(2) $\lambda = 1$ に対して: $E - A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s は

任意定数). よって, V_1 の基底は $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. $\lambda = 3$ に対して: $3E - A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

より, $(3E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s, t は任意定数). よって, V_3 の基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

(3) $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とおけば, 命題 13.6 (ii) から, 基本解は 1 次独立なので, P は正則で, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

勿論, $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ でも対角化は変わらない.

(c) について

(1) $F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 4 & -4 \\ -2 & \lambda - 6 & 4 \\ -1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & \lambda - 6 & 4 \\ -1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^3$. A の固有値は $\lambda = 2$.

(2) $\lambda = 2$ に対して: $2E - A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(2E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(s, t は任意定数). よって, V_2 の基底は $\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

(3) $\dim V_2 = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$ であるから, (c) の A は対角化可能でない.

2 $\mathbf{y}(t) = P^{-1}\mathbf{x}(t) \Leftrightarrow \mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t)$ とおくと, P は定数行列なので, 方程式 $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ は方程式 $\mathbf{y}'(t) = P^{-1}AP\mathbf{y}(t)$ に変換され, $P^{-1}AP$ は対角行列のため, 単独の斉次線形微分方程式 $y_1'(t) = y_1(t)$, $y_j'(t) = 3y_j(t)$ ($j = 2, 3$) に帰着されるから, y_1, y_2, y_3 は独立に解ける. つまり, 講義「解析学」で学んだように, 一般解 $y_1(t) = C_1 e^t$, $y_j(t) = C_j e^{3t}$ ($j = 2, 3$) を得る. 但し, C_1, C_2, C_3 は任意の定数を表す. よって, 求める一般解は

$$\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{3t} \\ C_3 e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2C_1 e^t + (C_2 + C_3) e^{3t} \\ -C_1 e^t + C_2 e^{3t} \\ C_1 e^t + C_3 e^{3t} \end{bmatrix}.$$

【レポート課題の解答例】

3

(1) f の固有値は行列 A の固有値と一致するので, A の固有多項式 $F_A(\lambda)$ を因数分解する.

$$F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

より, 求めるすべての固有値は $\boxed{1, 2}$.

(2) $\lambda = 1$ のとき: $E_3 - A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より $V_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$. V_1 の基底は $\left(\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$.

$\lambda = 2$ のとき: $2E_3 - A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より $V_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$. V_2 の基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

(3) (2) の結果より $\dim V_1 + \dim V_2 = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$ なので, f は対角化可能でない (線形教科書の定理 24.6).

(4) $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $P = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3]$ とおけば, (2) の結果および $A\mathbf{p}_3 = 2\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_2$ に注意して,

$$AP = [A\mathbf{p}_1 \ A\mathbf{p}_2 \ A\mathbf{p}_3] = [\mathbf{p}_1 \ 2\mathbf{p}_2 \ 2\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_2] = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

このとき, $|P| = 1 \neq 0$ (従って P は正則) であるから, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ となる. そこで, $\mathbf{y}(t) = P^{-1}\mathbf{x}(t)$

とおいて, $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t)$ を方程式 $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ に代入すると, P は定数行列なので, $P\mathbf{y}'(t) = AP\mathbf{y}(t)$ より, $\mathbf{y}'(t) = P^{-1}AP\mathbf{y}(t)$ を得る. よって, 連立の斉次線形微分方程式 $y_1'(t) = y_1(t)$, $y_2'(t) = 2y_2(t) + y_3(t)$, $y_3'(t) = 2y_3(t)$ に変換されるが, $P^{-1}AP$ は上三角行列のため, y_3, y_2, y_1 の順に解ける. 今の場合にはもっとよく, 一般解 $y_1(t) = C_1 e^t$, $y_3(t) = C_3 e^{2t}$ が最初に得られる. また, よく知られているように, $y_2'(t) = 2y_2(t) + C_3 e^{2t}$ を $\frac{d}{dt}(e^{-2t}y_2(t)) = C_3$ と変形して, t で積分することにより, $y_2(t) = (C_2 + C_3 t)e^{2t}$ がわかる ($y_2(t)$ に関する 1 階線形微分方程式と見てもよい). 但し, C_1, C_2, C_3 は任意の定数を表す. よって, 求める一般解は

$$\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^t \\ (C_2 + C_3 t)e^{2t} \\ C_3 e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4C_1 e^t + (C_2 + C_3 t)e^{2t} \\ -C_1 e^t \\ 2C_1 e^t + (C_2 + C_3 + C_3 t)e^{2t} \end{bmatrix}.$$

【注】一般に, 複素数成分の正方行列 M は対角化できなくても, 三角化可能 (適当な正則行列 P に対し $P^{-1}MP$ が三角行列) であることが知られている. 斉次線形微分方程式 $\mathbf{x}'(t) = M\mathbf{x}(t)$ を解くには三角化できれば十分.

【それ以外の自習用問題の解答例】

4

(a) について

(1) $F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-8 & 9 \\ -6 & \lambda+7 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$. A の固有値は $\lambda = -1, 2$.

(2) $\lambda = -1$ に対して: $-E - A = \begin{bmatrix} -9 & 9 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(-E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s は任意定数).

よって, V_{-1} の基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. $\lambda = 2$ に対して: $2E - A = \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(2E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって, V_2 の基底は $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$.

(3) $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) について

(1) $F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 1 & -5 \\ -1 & \lambda-2 & -3 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$. A の固有値は $\lambda = 1, 2, 3$.

(2) $\lambda = 1$ に対して: $E - A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって, V_1 の基底は $\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. $\lambda = 2$ に対して: $2E - A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(2E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって, V_2 の基底は $\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. $\lambda = 3$ に対して: $3E - A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(3E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって, V_3 の基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

(3) $P = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(c) について

(1) $F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -1 \\ 4 & \lambda-5 & -2 \\ -4 & 4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3$. A の固有値は $\lambda = 1$.

(2) $\lambda = 1$ に対して: $E - A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ (s, t は任意定数). よって, V_1 の基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$.

(3) $\dim V_1 = 2 < 3$ であるから, (c) の A は対角化可能でない.

5 $\lambda = 0$ のとき, 線形教科書の定理 11.3 から, $|BA| = |AB| = 0$ なので, 0 も BA の固有値である. $\lambda \neq 0$ のとき, AB の固有値 λ に対する固有ベクトルの 1 つを \mathbf{x} とすると, $AB\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ をみたすが, $\lambda \neq 0$ より, $\lambda\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ のため, $AB\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ である. 特に, $B\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ で, $BA(B\mathbf{x}) = B(AB\mathbf{x}) = B(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(B\mathbf{x})$ が成り立つ. $\lambda \neq 0$ のときも, λ は BA の固有値である.

【参考】一般に, 同じサイズの正方行列 A, B に対して, 等式 $F_{AB}(\lambda) = F_{BA}(\lambda)$ が成り立つ. これを示しておこう.

《方法 1》 A, B を n 次正方行列とすると,

$$\begin{bmatrix} E_n & -A \\ O & \lambda E_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda E_n & A \\ B & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda E_n - AB & O \\ \lambda B & \lambda E_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} E_n & O \\ -B & \lambda E_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda E_n & A \\ B & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda E_n & A \\ O & \lambda E_n - BA \end{bmatrix}.$$

ここで, $\begin{vmatrix} E_n & -A \\ O & \lambda E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_n & O \\ -B & \lambda E_n \end{vmatrix} = \lambda^n$ であるから, 上の 2 式について, それぞれ両辺の行列式をとることにより,

$$\lambda^n \begin{vmatrix} \lambda E_n & A \\ B & E_n \end{vmatrix} = \lambda^n |\lambda E_n - AB| = \lambda^n |\lambda E_n - BA|.$$

を得る. よって, λ の多項式 (整式) として, $|\lambda E_n - AB| = |\lambda E_n - BA|$, すなわち $F_{AB}(\lambda) = F_{BA}(\lambda)$ が成り立つ.

《方法 2》 A が正則のとき, $|\lambda E - AB| = |A||\lambda A^{-1} - B| = |\lambda A^{-1} - B||A| = |\lambda E - BA|$. A が正則でないとき, 正数 ε_1 を十分小さくとれば, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ に対して $A_\varepsilon := A + \varepsilon E$ は正則となる (A の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とすれば, A_ε の固有値は $\lambda_1 + \varepsilon, \dots, \lambda_n + \varepsilon$ となることに注意). このとき, $|\lambda E - A_\varepsilon B| = |\lambda E - BA_\varepsilon|$ が成り立つので, $\varepsilon \rightarrow +0$ とすることにより, $|\lambda E - AB| = |\lambda E - BA|$ を得る (n 次正方行列 M の行列式 $|M|$ は M の各成分を変数とする n^2 変数多項式, 従って各成分に関して連続であることに注意). よって, $F_{AB}(\lambda) = F_{BA}(\lambda)$ が示された.

6 (1) $(A\mathbf{p}_1, \dots, A\mathbf{p}_n) = (f(\mathbf{p}_1), \dots, f(\mathbf{p}_n)) = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)D = (\mu_1\mathbf{p}_1, \dots, \mu_n\mathbf{p}_n)$ (2 番目の等号で表現行列の定義を用いた) より, $A\mathbf{p}_k = \mu_k\mathbf{p}_k$ ($1 \leq k \leq n$). $\mathbf{p}_k \neq \mathbf{0}$ であるから, μ_k は A の固有値であり, \mathbf{p}_k は μ_k に対する固有ベクトルである.

- (2) (1) の結果から, $AP = A[\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n] = [A\mathbf{p}_1 \cdots A\mathbf{p}_n] = [\mu_1\mathbf{p}_1 \cdots \mu_n\mathbf{p}_n] = [\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n]D = PD$.
 $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ が 1 次独立なので, $P = [\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n]$ は正則となる. よって, $AP = PD$ から $P^{-1}AP = D$ が従う.
- (3) $A = PDP^{-1}$ と書けるから, $F_A(\lambda) = |\lambda E - A| = |P(\lambda E - D)P^{-1}| = |P| \begin{vmatrix} \lambda - \mu_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda - \mu_n \end{vmatrix} |P^{-1}| = (\lambda - \mu_1) \cdots (\lambda - \mu_n)$. ここで, $|P||P^{-1}| = |PP^{-1}| = |E_n| = 1$ を用いた.
- (4) $A = PDP^{-1}$ より $A\mathbf{x} = \mu\mathbf{x} \Leftrightarrow (\mu E - D)P^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mu - \mu_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \mu - \mu_n \end{bmatrix} P^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ であるから, μ は μ_1, \dots, μ_n のいずれかと一致する. $\mu_k = \mu$ となる k を k_1, \dots, k_m (m が固有値 μ の代数的重複度) とすれば, $\mathbf{x} \in V_\mu \Leftrightarrow P^{-1}\mathbf{x} \in \langle \mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_m} \rangle \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \langle \mathbf{p}_{k_1}, \dots, \mathbf{p}_{k_m} \rangle$. よって, $V_\mu = \langle \mathbf{p}_{k_1}, \dots, \mathbf{p}_{k_m} \rangle$ となり, $\dim V_\mu = m$ が示された.

7

- (1) $P^{-1}AP = C, P^{-1}BP = D$ とおくと, C, D は対角行列なので, $CD = DC$ が成り立つから
 $AB = (PCP^{-1})(PDP^{-1}) = P(CD)P^{-1} = P(DC)P^{-1} = (PDP^{-1})(PCP^{-1}) = BA$.

- (2) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を A の固有値とし, $\mathbf{0} \neq \mathbf{p}_k \in V_{\lambda_k}$ ($k = 1, \dots, n$) とすると

$$A(B\mathbf{p}_k) = BA\mathbf{p}_k = B(\lambda_k\mathbf{p}_k) = \lambda_k(B\mathbf{p}_k)$$

より, $B\mathbf{p}_k \in V_{\lambda_k}$ を得る. また, 仮定から, $\dim V_{\lambda_k} = 1$ なので, $B\mathbf{p}_k = \mu_k\mathbf{p}_k$ となる複素数 μ_k が存在する.

よって, $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ は 1 次独立であるから, $P := [\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n]$ は正則で, $C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \mu_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \mu_n \end{bmatrix}$

とおくと, [6] (2) と同様に $AP = PC, BP = PD$ が成り立つので, $P^{-1}AP = C, P^{-1}BP = D$ をみたとす.

8

- (1) $p = 2\alpha, q = -\alpha^2$ に注意する. $f(\mathbf{c}_1) = q\mathbf{c}_2, f(\mathbf{c}_2) = \mathbf{c}_1 + p\mathbf{c}_2, F_A(\alpha) = 0$ および $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ の 1 次独立性から,

$$f(\mathbf{c}_2) = (p - \alpha)\mathbf{c}_2 + (\mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2) = \alpha\mathbf{c}_2 + (\mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2), f(\mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2) = \alpha\mathbf{c}_1 + (p\alpha + q)\mathbf{c}_2 = \alpha(\mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2).$$

- (2) 簡単のため, $T = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$ とおくと, $T^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 2\alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}$ である. ここで, $n \geq 2$ に対して, $T^n = \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ n\alpha^{n-1} & \alpha^n \end{bmatrix}$ を n に関する帰納法で示す. そこで, n での成立を帰納法の仮定とすると

$$T^{n+1} = T^n T = \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ n\alpha^{n-1} & \alpha^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^{n+1} & 0 \\ (n+1)\alpha^n & \alpha^{n+1} \end{bmatrix}.$$

- (3) (1) と (2) の結果より, $n \geq 1$ に対して

$$(f^n(\mathbf{c}_2), f^n(\mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2)) = (\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2)T^n = (\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2) \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ n\alpha^{n-1} & \alpha^n \end{bmatrix}$$

が成り立つ. 特に, $\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2$ の第 n 項 $(\mathbf{c}_2)_n, (\mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2)_n$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} (\mathbf{c}_2)_n &= (f^{n-1}(\mathbf{c}_2))_1 = \alpha^{n-1}(\mathbf{c}_2)_1 + (n-1)\alpha^{n-2}(\mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2)_1 = (n-1)\alpha^{n-2}, \\ (\mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2)_n &= (f^{n-1}(\mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2))_1 = \alpha^{n-1}(\mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2)_1 = \alpha^{n-1} \end{aligned}$$

で表される. また, 任意の $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in W$ に対して

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_1\mathbf{c}_1 + a_2\mathbf{c}_2 = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \\ &= (\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2) \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{c}_2) \begin{bmatrix} -\alpha a_1 + a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と書ける. よって, $n \geq 1$ に対して, $\alpha = \frac{p}{2}$ に注意して

$$\begin{aligned} a_n &= (a_2 - \alpha a_1)(n-1)\alpha^{n-2} + a_1\alpha^{n-1} = (2-n)a_1\alpha^{n-1} + (n-1)a_2\alpha^{n-2} \\ &= \left\{ \left(a_2 - \frac{p}{2}a_1 \right) n + (pa_1 - a_2) \right\} \left(\frac{p}{2} \right)^{n-2} \end{aligned}$$

が得られる.