数学演習第二・中間統一試験【解説】

2022 年 12 月 7 日実施 ・ 試験時間 90 分

1

(1) $\log x = t$ とおくと，$dx = e^t\,dt$ より

$$\int_0^1 (\log x)^2\,dx = \int_{-\infty}^0 t^2 e^t\,dt = \big[\,t^2 e^t\,\big]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 2te^t\,dt = -\big[\,2te^t\,\big]_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 2e^t\,dt = \boxed{2}.$$

[別解] $(\log x)^2 = (\log x)(\log x) = 1\cdot(\log x)^2$ に部分積分を適用. $\displaystyle\int \log x\,dx = x\log x - x$ より，

- $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^2\,dx = \big[\,(x\log x - x)\ \log x\,\big]_{+0}^1 - \int_0^1 (\log x - 1)\,dx = -\big[\,x\log x - 2x\,\big]_{+0}^1 = \boxed{2}.$
- $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^2\,dx = \big[\,x(\log x)^2\,\big]_{+0}^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{2\log x}{x}\,dx = -2\big[\,x\log x - x\,\big]_{+0}^1 = \boxed{2}.$

2

(2) $f_x(x,y) = \boxed{12x + 12y}$.

(3) f_x を y で偏微分して，$f_{xy}(x,y) = \boxed{12}$.

(4) (1) と $f_y(x,y) = 3y^2 + 12x$ より，$f_x(-1,1) = 0$，$f_y(-1,1) = -9$. よって，求める接平面の方程式は，$z + 5 = -9(y-1)$ すなわち $\boxed{z = -9y + 4}$.

(5) 連立方程式 $f_x(x,y) = 12(x+y) = 0$，$f_y(x,y) = 3(y^2 + 4x) = 0$ を解くと，f の停留点は $(0,0)$，$(-4,4)$. 判別式は $D(x,y) = \begin{vmatrix} 12 & 12 \\ 12 & 6y \end{vmatrix} = 72(y-2)$ なので，$D(0,0) < 0$ となり，f は点 $(0,0)$ で極値をとらない. 一方，$D(-4,4) > 0$ かつ $f_{xx}(-4,4) = 12 > 0$ より，f は $\boxed{\text{点 } (-4,4) \text{ で極小値 } f(-4,4) = -32 \text{ をとる}}$.

3

(6) $\varphi(0) = 1$，$\varphi'(0) = 1$，$\psi(0) = 0$，$\psi'(0) = -1$ だから，連鎖律より，

$$g'(0) = f_x(\varphi(0),\psi(0))\varphi'(0) + f_y(\varphi(0),\psi(0))\psi'(0) = f_x(1,0) - f_y(1,0).$$

ここで，$f_x(1,0) = e\log 2 + \dfrac{e}{2}$ より $f_x(1,0) = e\log 2 + \dfrac{e}{2}$ であり，また $f_y(x,y) = \dfrac{e^{x+y}}{x + e^y}$ より $f_y(1,0) = \dfrac{e}{2}$ であるから，これらを代入して $g'(0) = \boxed{e\log 2}$ を得る.

4

(7) $\varphi(0,1) = 1$，$\psi(0,1) = 1$ であり，また $\varphi_u(u,v) = 2v$，$\psi_u(u,v) = \cos u$ より $\varphi_u(0,1) = 2$，$\psi_u(0,1) = 1$ であるから，連鎖律により

$$\begin{aligned} g_u(0,1) &= f_x(\varphi(0,1),\psi(0,1))\varphi_u(0,1) + f_y(\varphi(0,1),\psi(0,1))\psi_u(0,1) \\ &= 2f_x(1,1) + f_y(1,1). \end{aligned}$$

ここで，

$$f_x(x,y) = \frac{y}{\sqrt{1 - (\frac{y}{1+x})^2}}\cdot\left\{-\frac{y}{(1+x)^2}\right\} \quad \text{より} \quad f_x(1,1) = -\frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$f_y(x,y) = \mathrm{Sin}^{-1}\Big(\frac{y}{1+x}\Big) + \frac{y}{\sqrt{1 - (\frac{y}{1+x})^2}}\cdot\frac{1}{1+x} \quad \text{より} \quad f_y(1,1) = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

であるから，これらを代入して $g_u(0,1) = \boxed{\dfrac{\pi}{6}}$ を得る.

5

(8) $\dfrac{1}{1-X}=1+X+X^2+o(X^2)$ より，

$$\frac{1+x}{1-x^2-y}=(1+x)(1+x^2+y+(x^2+y)^2)+o(r^2)$$
$$=(1+x)(1+y+x^2+y^2)+o(r^2)=\boxed{1+x+y+x^2+xy+y^2}+o(r^2).$$

(9) $e^X=1+X+o(X),\ \cos X=1-\dfrac{1}{2}X^2+o(X^2),\ \sqrt{1+X}=1+\dfrac{1}{2}X+o(X)$ を用いて，

$$\sqrt{e^{xy}+\cos(x+y)}=\sqrt{1+xy+1-\frac{1}{2}(x+y)^2+o(r^2)}=\sqrt{2-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+o(r^2)}$$
$$=\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}y^2+o(r^2)}=\boxed{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{8}x^2-\frac{\sqrt{2}}{8}y^2}+o(r^2).$$

6

(10) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{t}{s^2} & \frac{1}{s}\\ \cos(st)-st\sin(st) & -s^2\sin(st)\end{vmatrix}=\boxed{2t\sin(st)-\frac{1}{s}\cos(st)}.$

7

(11) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{bmatrix}1\\-2\\-3\end{bmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{bmatrix}-2\\3\\4\end{bmatrix}$ より，平面 α の法線ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$．また，点 A を通るから， 平面 α の方程式は $(x-1)+2(y-3)-(z-1)=0$，すなわち $\boxed{x+2y-z-6=0}$．

(12) 直線 ℓ 上の点は，実数 t を用いて $x=2t+2,\ y=2t+4,\ z=t-1$ と書ける． これを平面 α の方程式に代入して，$5t+5=0\ \therefore t=-1$．よって交点の座標は $\boxed{(0,2,-2)}$．

(13) 直線 ℓ の方向ベクトルは $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}$．また，直線 ℓ は点 $\mathrm{P}(2,4,-1)$ を通る $(t=0)$．よって点 A と直線 ℓ の距離は，

$$\sqrt{\|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\|^2-\frac{(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\boldsymbol{a})^2}{\|\boldsymbol{a}\|^2}}\left(=\frac{\|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\times\boldsymbol{a}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}\right)=\sqrt{\frac{50}{9}}=\boxed{\frac{5\sqrt{2}}{3}}.$$

8

(14) 係数行列を行基本変形すると，$\begin{bmatrix}1 & -2 & -2 & 1\\ 3 & -4 & -2 & 3\\ 5 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$ となるから，解は

$c\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3}\\ 1\end{bmatrix}$ $(c\in\mathbb{R})$． よって W_1 の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\-3\end{bmatrix}\right)}$ がとれる．

(15) $W_1+W_2=\mathbb{R}^4$ となるための条件は $\dim(W_1+W_2)=4$ である．

$$W_1+W_2=\left\langle\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\-9\\3\\-14\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\3\\5\\10\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\5\\5\\k\end{bmatrix}\right\rangle$$

だから，これらのベクトルが一次独立であればよい．行基本変形により，

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 0 & 1\\ -2 & -9 & 3 & 5\\ 1 & 3 & 5 & 5\\ -3 & -14 & 10 & k\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 4 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & k-5\end{bmatrix}.$$

よって，求める条件は $\boxed{k\neq 5}$． 別法として，行列式 $\neq 0$ から導いてもよい．

$\boxed{9}$ (16) $\boldsymbol{v} = 2 \cdot \boldsymbol{a}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{a}_2 + (-1) \cdot \boldsymbol{a}_3$ より $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}$.

(17) 行基本変形により，

$$[\boldsymbol{a}_1 \;\; \boldsymbol{a}_2 \;\; \boldsymbol{a}_3 \;\; \boldsymbol{b}_1] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となるから，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}} = \boxed{\begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}}$.

(18) 行基本変形により，

$$[\boldsymbol{a}_1 \;\; \boldsymbol{a}_2 \;\; \boldsymbol{b}_1 \;\; \boldsymbol{b}_2] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

となるから，非自明な一次関係式 $-\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = 0$ が読み取れる． よって

$$\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2$$

である．また，簡約行列から，$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2), (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2), (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)$ がそれぞれ一次独立であることが分かるので，$\dim W_1 = \dim W_2 = 2$，$\dim(W_1 + W_2) = 3$ である．したがって次元公式から，

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) = 1$$

となるので，$W_1 \cap W_2$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} \right)}$ がとれる．

[別解] 任意の $\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$ は $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = d_1\boldsymbol{b}_1 + d_2\boldsymbol{b}_2$ と書ける．このとき，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 - d_1\boldsymbol{b}_1 - d_2\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$ であるから，上で計算した $[\boldsymbol{a}_1 \;\; \boldsymbol{a}_2 \;\; \boldsymbol{b}_1 \;\; \boldsymbol{b}_2]$ の簡約化から $(c_1, c_2, -d_1, -d_2) = t(-1, 2, 1, 1)$ (t は任意定数)．よって，$\boldsymbol{x} = t \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$ となり，$W_1 \cap W_2$ の基底 $\boxed{\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} \right)}$ を得る．（このように議論すれば次元の考察は不要.）

$\boxed{10}$ (19) $\dim C(A) = \operatorname{rank} A$ だから，$\operatorname{rank} A = 2$ であればよい．行基本変形により，

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & k+6 \end{bmatrix}$$

となるから，求める条件は $\boxed{k = -6}$.

(20) $k = -6$ のとき，A の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となるから，$N(A)$ の基底として

$$\left(\begin{bmatrix} \boxed{2} \\ \boxed{3} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boxed{2} \\ \boxed{4} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$ がとれる．