2022年度 数学演習第二・中間統一試験【問題用紙】

2022年12月7日 実施 (90分)

- 解答用紙の所定欄に結果のみを記すこと．
- 簡潔な解答になるよう努めること．不十分と判断された解答には得点を与えないことがある．

1 (1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^2\,dx$ の値を求めよ．

2 $f(x,y)=y^3+6x^2+12xy$ とする．

(2) 偏導関数 $f_x(x,y)$ を求めよ．

(3) 2次の偏導関数 $f_{xy}(x,y)$ を求めよ．

(4) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $(-1,\,1,-5)$ における接平面の方程式を求めよ．

(5) $f(x,y)$ が極値をとる点の座標とその極値を求めよ (極大値か極小値かも明記せよ)．

3 $f(x,y)=e^x\log(x+e^y)$, $\varphi(t)=\dfrac{1+t}{1+t^2}$, $\psi(t)=-\sin t$ とする．

(6) 合成関数 $g(t)=f(\varphi(t),\,\psi(t))$ に対して，$g'(0)$ の値を求めよ．

4 $f(x,y)=y\,\mathrm{Sin}^{-1}\!\left(\dfrac{y}{1+x}\right)$, $\varphi(u,v)=2uv+v^2$, $\psi(u,v)=\sin u+v$ とする．

(7) 合成関数 $g(u,v)=f(\varphi(u,v),\,\psi(u,v))$ に対して，$g_u(0,1)$ の値を求めよ．

5 次の $f(x,y)$ の $(0,0)$ における2次の項までのマクローリン展開

$$f(x,y)=\underline{a_{00}+a_{10}\,x+a_{01}\,y+a_{20}\,x^2+a_{11}\,xy+a_{02}\,y^2}+o(r^2)\quad (r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0)$$

を求め，<u>下線部に相当する部分のみ</u>を解答欄に記入せよ．

(8) $f(x,y)=\dfrac{1+x}{1-x^2-y}$

(9) $f(x,y)=\sqrt{e^{xy}+\cos(x+y)}$

6 次の変換のヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}$ を求めよ．

(10) $x=\dfrac{t}{s}$, $y=s\cos(st)$

$\boxed{7}$ 3 点 $\mathrm{A}(1,\,3,\,1)$, $\mathrm{B}(2,\,1,\,-2)$, $\mathrm{C}(-1,\,6,\,5)$ を通る平面 α と，直線 $\ell:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{2}=z+1$ を考える.

(11) 平面 α の方程式を求めよ.

(12) 平面 α と直線 ℓ の交点の座標を求めよ.

(13) 点 A と直線 ℓ の距離を求めよ.

$\boxed{8}$ $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W_1=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4\;\middle|\;\begin{array}{r}x-2y-2z+\ \ w=0\\3x-4y-2z+3w=0\\5x+\ \ y\qquad\ +\ \ w=0\end{array}\right\},\quad W_2=\left\langle\begin{bmatrix}4\\-9\\3\\-14\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\3\\5\\10\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\5\\5\\k\end{bmatrix}\right\rangle$$

を考える.

(14) W_1 の基底を求めよ.

(15) $W_1+W_2=\mathbb{R}^4$ となるための実数 k の条件を求めよ.

$\boxed{9}$ $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A}=\left(\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix},\,\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix},\,\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}\right)$ と，$\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W_1=\langle\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2\rangle,\qquad W_2=\left\langle\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}4\\2\\-1\end{bmatrix},\,\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}-1\\3\\-2\end{bmatrix}\right\rangle$$

を考える.

(16) $\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_3$ とおく. $\boldsymbol{v}$ の $\mathcal{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}}$ を求めよ.

(17) $\boldsymbol{b}_1$ の $\mathcal{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}}$ を求めよ.

(18) $W_1\cap W_2$ の基底を求めよ.

$\boxed{10}$ 行列 $A=\begin{bmatrix}2&1&7&8\\1&-1&-1&-2\\7&-5&-1&k\end{bmatrix}$ の列空間を $C(A)$，零空間を $N(A)$ とする.

(19) $\dim C(A)=2$ となるための実数 k の条件を求めよ.

(20) 実数 k が (19) の条件を満たすとき，$N(A)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix}\boxed{}\\\boxed{}\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\boxed{}\\\boxed{}\\0\\-1\end{bmatrix}\right)$ の形のものがとれる. 解答欄の空所に適切な数値を記入せよ.