数学演習第二・期末統一試験【解説】

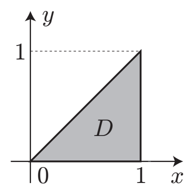
2023 年 2 月 8 日実施 ・ 試験時間 90 分

$\boxed{1}$ 次の 2 重積分の値を計算せよ. ただし, (3) の log は自然対数を表す.

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy,\quad D:\ 0 \leqq y \leqq x \leqq 1.$

【答】 $\displaystyle (\text{与式}) = \iint_{\substack{0\leqq x\leqq 1\\ 0\leqq y\leqq x}} xy\,dxdy = \int_0^1 dx\int_0^x xy\,dy = \int_0^1 \Big[\frac{1}{2}xy^2\Big]_{y=0}^{y=x} dx$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}x^3\,dx = \Big[\frac{1}{8}x^4\Big]_0^1 = \boxed{\frac{1}{8}}.$$



(2) $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)\,dxdy,\quad D:\ 0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}.$

【答】 $\displaystyle (\text{与式}) = \iint_{\substack{0\leqq x\leqq \pi\\ 0\leqq y\leqq \frac{\pi}{2}}} \cos(x+y)\,dxdy = \int_0^\pi dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)\,dy = \int_0^\pi \Big[\sin(x+y)\Big]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} dx$

$$= \int_0^\pi (\cos x - \sin x)\,dx = \Big[\sin x + \cos x\Big]_0^\pi = \boxed{-2}.$$

［別法］$\displaystyle (\text{与式}) = \iint_{\substack{0\leqq x\leqq \pi\\ 0\leqq y\leqq \frac{\pi}{2}}} (\cos x\cos y - \sin x\sin y)\,dxdy$

$$= \left(\int_0^\pi \cos x\,dx\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y\,dy\right) - \left(\int_0^\pi \sin x\,dx\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y\,dy\right) = 0\cdot 1 - 2\cdot 1 = \boxed{-2}.$$

(3) $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)\,dxdy,\quad D:\ 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ y \geqq 0.$

【答】 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を用いる. ヤコビアンは $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ であり, D は $r\theta$ 平面の閉領域 $1 \leqq r \leqq 2$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$ に対応するから,

$$(\text{与式}) = \iint_{\substack{1\leqq r\leqq 2\\ 0\leqq \theta\leqq \pi}} \log r^2\cdot r\,drd\theta = \left(\int_1^2 2r\log r\,dr\right)\left(\int_0^\pi d\theta\right)$$

$$= \left(\Big[r^2\log r\Big]_1^2 - \int_1^2 r^2\cdot\frac{1}{r}\,dr\right)\pi = \pi\left(4\log 2 - \Big[\frac{1}{2}r^2\Big]_1^2\right)\pi = \boxed{\left(4\log 2 - \frac{3}{2}\right)\pi}.$$

(4) $\displaystyle\iint_D (x+y)\,e^{x-y}\,dxdy,\quad D:\ 0 \leqq x+y \leqq 1,\ (x+y)^2 \leqq x-y \leqq 1.$

【答】 $u = x+y$, $v = x-y$ による変数変換を用いる. このとき, $x = \frac{1}{2}(u+v)$, $y = \frac{1}{2}(u-v)$ であり, ヤコビアンは $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2}$. D は uv 平面の閉領域 $0 \leqq u \leqq 1$, $u^2 \leqq v \leqq 1$ に対応するので,

$$(\text{与式}) = \iint_{\substack{0\leqq u\leqq 1\\ u^2\leqq v\leqq 1}} ue^v\left|-\frac{1}{2}\right|dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 du\int_{u^2}^1 ue^v\,dv = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[ue^v\Big]_{v=u^2}^{v=1} du$$

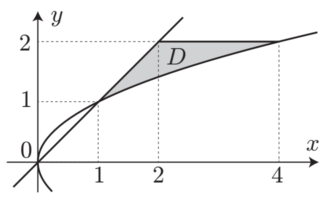
$$= \frac{1}{4}\int_0^1 2u(e - e^{u^2})\,du \overset{u^2=w}{=} \frac{1}{4}\int_0^1 (e - e^w)\,dw = \frac{1}{4}\Big[ew - e^w\Big]_0^1 = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

$\boxed{2}$ (5) 連続関数 $f(x,y)$ に対して, 等式

$$\int_1^2 dy\int_y^{y^2} f(x,y)\,dx = \int_1^{\boxed{ア}} dx\int_{\boxed{イ}}^{\boxed{ウ}} f(x,y)\,dy + \int_{\boxed{ア}}^4 dx\int_{\boxed{イ}}^{\boxed{エ}} f(x,y)\,dy$$

が成り立つ. このとき, **ア** から **エ** に入るべき適切な数値または数式を答えよ.

【答】 $$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \iint_{\substack{1\leqq y\leqq 2\\ y\leqq x\leqq y^2}} f(x,y)\,dxdy\\ &= \iint_{\substack{1\leqq x\leqq 2\\ \sqrt{x}\leqq y\leqq x}} f(x,y)\,dxdy + \iint_{\substack{2\leqq x\leqq 4\\ \sqrt{x}\leqq y\leqq 2}} f(x,y)\,dxdy\\ &= \int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x} f(x,y)\,dy + \int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)\,dy = (\text{右辺}).\end{aligned}$$



よって, **ア** $\boxed{2}$, **イ** $\boxed{\sqrt{x}}$, **ウ** $\boxed{x}$, **エ** $\boxed{2}$.

3 (6) 3 重積分

$$I = \iiint_V \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\,dxdydz, \qquad V:\ x^2+y^2+z^2 \leqq 1,\ z \leqq 0$$

を考える. V は極座標変換 $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ により,

$$W:\ 0 \leqq r \leqq \boxed{\text{カ}},\quad \boxed{\text{キ}} \leqq \theta \leqq \pi,\quad 0 \leqq \varphi \leqq \boxed{\text{ク}}$$

に対応する. I の値を計算すると, $I = \boxed{\text{ケ}}$ となる. このとき, **カ** から **ケ** に入るべき適切な数値または数式を答えよ.

【答】 空間の極座標変換 $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ のヤコビアンは $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$ であり, この変換で V は $r\theta\varphi$ 空間の閉領域 $W:\ 0 \leqq r \leqq 1,\ \dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ に対応するから,

$$\begin{aligned}I &= \iiint_W \frac{1}{1+r^2}\cdot r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi = \left(\int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2}\,dr\right)\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\\ &= \int_0^1\left(1-\frac{1}{1+r^2}\right)dr\cdot\Big[-\cos\theta\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cdot 2\pi = 2\pi\Big[r-\mathrm{Tan}^{-1}\,r\Big]_0^1 = 2\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \left(2-\frac{\pi}{2}\right)\pi.\end{aligned}$$

よって, **カ** $\boxed{1}$, **キ** $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$, **ク** $\boxed{2\pi}$, **ケ** $\boxed{\left(2-\dfrac{\pi}{2}\right)\pi}$.

4 2 変数関数 $g(x,y) = x^3+3x^2y+3y^2+1$ について考える. $g(x,y) = 0$ で定義される陰関数を $y = \varphi(x)$ として, 以下の設問に答えよ.

(7) $\varphi'(x)$ を x, y の有理式で表せ.

【答】 陰関数 $y = \varphi(x)$ は曲線 $g(x,y) = 0$ 上の $g_y(x,y) = 3(x^2+2y) \neq 0$ を満たす範囲で定義される. $g(x,y) = x^3+3x^2y+3y^2+1 = 0$ $(y = \varphi(x))$ を x で微分して,

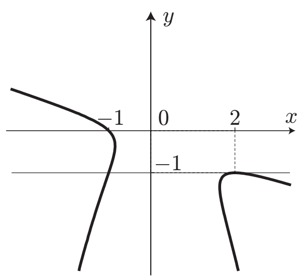
$$g_x(x,y) + g_y(x,y)y' = 0. \qquad \therefore\ y' = \varphi'(x) = -\frac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)} = -\frac{3(x^2+2xy)}{3(x^2+2y)} = \boxed{-\frac{x^2+2xy}{x^2+2y}}.$$

(8) $\varphi(x)$ の極値をすべて求め, 解答欄には「点 $x = a$ で極大値（または極小値）b をとる」という形式で答えを記せ.

【答】 $y = \varphi(x)$ が極値をとる点においては $y' = \varphi'(x) = 0$ を満たすので, まず

$$g(x,y) = x^3+3x^2y+3y^2+1 = 0, \quad g_x(x,y) = 3x(x+2y) = 0$$

を解く. 第 2 式より $x = 0$ または $x = -2y$. $x = 0$ のとき, 第 1 式は $3y^2+1 = 0$ となり不適. 一方, $x = -2y$ のとき, 第 1 式は $4y^3+3y^2+1 = (y+1)(4y^2-y+1) = 0$ となり, $(x,y) = (2,-1)$. ここで,



$$y'' = -\frac{g_{xx}(x,y)+2g_{xy}(x,y)y'+g_{yy}(x,y)(y')^2}{g_y(x,y)} \quad (y = \varphi(x))$$

であるから, $g_{xx}(x,y) = 6(x+y)$, $\varphi'(2) = 0$ に注意して, $\varphi''(2) = -\dfrac{g_{xx}(2,-1)}{g_y(2,-1)} = -1 < 0$. よって, $\varphi(x)$ は $\boxed{\text{点 } x = 2 \text{ で極大値 } -1 \text{ をとる}}$.

(9) $f(x,y)=x+y$, $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\, g(x,y)$ とおくとき, 連立方程式

$$F_x(x,y,\lambda)=0,\ \ F_y(x,y,\lambda)=0,\ \ g(x,y)=0$$

の解 (x,y,λ) をすべて求めよ.

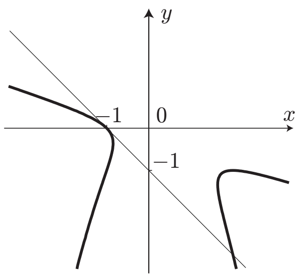
【答】 $F_x(x,y,\lambda)=0$, $F_y(x,y,\lambda)=0$, $g(x,y)=0$ を具体的に書くと,

$$1-3\lambda(x^2+2xy)=0,\quad 1-3\lambda(x^2+2y)=0,\quad x^3+3x^2y+3y^2+1=0.$$

最初の 2 式より, $\lambda\neq 0$ であって, $x^2+2xy=x^2+2y=\dfrac{1}{3\lambda}$. これより, $xy=y$ が導かれ, $x=1$ または $y=0$. 第 3 式より, $x=1$ のときは $3y^2+3y+2=0$ (判別式が負) となり不適, $y=0$ のときは $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$ となり $x=-1$. よって, 求める解は $\boxed{(x,y,\lambda)=\left(-1,\,0,\,\dfrac{1}{3}\right)}$.

(10) 条件 $g(x,y)=0$ の下で, 関数 $f(x,y)=x+y$ の極値をすべて求め, 解答欄には「点 (c,d) で極大値（または極小値）m をとる」という形式で答えを記せ.

【答】 極値をとる点の候補は $(-1,0)$ に限られる. この点の近傍で $g(x,y)=0$ は $y=\varphi(x)$ と書けるから, $x=-1$ の近傍で関数 $h(x):=f(x,\varphi(x))=x+\varphi(x)$ を考え, $x=-1$ での値 $h(-1)=-1+\varphi(-1)=-1$ が極値かどうかを調べればよい. ここで, $g_{xy}(x,y)=6x$, $g_{yy}(x,y)=6$ に注意して ($g_x(x,y)$, $g_y(x,y)$ は既に計算した),



$$g_x(-1,0)=g_y(-1,0)=3,\ \ g_{xx}(-1,0)=g_{xy}(-1,0)=-6,\ \ g_{yy}(-1,0)=6,$$

$$\varphi'(-1)=-\frac{g_x(-1,0)}{g_y(-1,0)}=-1\quad(\Rightarrow\ h'(-1)=0).$$

これより,

$$h''(-1)=\varphi''(-1)=-\frac{(-6)+2(-6)(-1)+6(-1)^2}{3}=-4<0.$$

よって, 与えられた条件付き極値問題は $\boxed{\text{点 }(-1,0)\text{ において極大値 }-1\text{ をとる}}$.

《注》 厳密には $g(x,y)=0$ 上に特異点 ($g_x=g_y=0$ となる点) がないことも示す必要がある. これは次のように示される. まず, (8) で見たように, $g=g_x=0$ を満たす点は $(2,-1)$ のみ. この点で $g_y(2,-1)=6\neq 0$ であるから $g(x,y)=0$ 上に特異点は存在しないことが分かる.

$\boxed{5}$ a, b を実数の定数とする.

$$f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1-4x_2+5x_3+7x_4\\-2x_1+3x_2-\ \,x_3-3x_4\\4x_1-\ \,x_2+ax_3+bx_4\end{bmatrix}$$

によって定義される線形写像 $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ に対して, 以下の設問に答えよ.

(11) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元 $\dim(\mathrm{Im}\, f)$ が 3 であるための a, b の条件を求めよ.

【答】 行基本変形により,

$$\begin{bmatrix}1&-4&5&7\\-2&3&-1&-3\\4&-1&a&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-4&5&7\\0&-5&9&11\\0&15&a-20&b-28\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-4&5&7\\0&-5&9&11\\0&0&a+7&b+5\end{bmatrix}.$$

$\dim(\mathrm{Im}\, f)=3$ であるためには上の行列の階数が 3, すなわち最後の行列の第 3 行が零ベクトルでなければよいので, 求める条件は $\boxed{a\neq -7\text{ または }b\neq -5}$. この条件は $\boxed{(a,b)\neq(-7,-5)}$ と書くこともできる.

(12) $a=-7$ とする. f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元 $\dim(\mathrm{Ker}\, f)$ が 2 になるための b の条件を求めよ.

【答】 $a=-7$ のとき, 上の行基本変形は $\begin{bmatrix}1&-4&5&7\\-2&3&-1&-3\\4&-1&-7&b\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&-4&5&7\\0&-5&9&11\\0&0&0&b+5\end{bmatrix}$ となる.

$\dim(\mathrm{Im}\, f)=4-\dim(\mathrm{Ker}\, f)=4-2=2$ (上の行列の階数が 2) となればよいので, 求める条件は $\boxed{b=-5}$.

(13) $a=-7$ とする. 次元 $\dim(\operatorname{Ker} f)$ が 1 であるとき, $\operatorname{Ker} f$ の基底を 1 つ求めよ.

【答】 $a=-7$ のとき, $\dim(\operatorname{Im} f)=4-\dim(\operatorname{Ker} f)=4-1=3$ となる条件は $b\neq -5$. このとき,

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 & 7 \\ -2 & 3 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & -7 & b \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 & 7 \\ 0 & -5 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & b+5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{11}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と行基本変形されるので, $\operatorname{Ker} f$ の基底は $\boxed{\left(\begin{bmatrix} 11 \\ 9 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}\right)}$.

6 p,q を実数とし, $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix} p \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix} q \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする. そして, $W=\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\rangle$, $\mathcal{A}=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, $\mathcal{B}=(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ とし,

$$g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x_1+3x_2 \\ \quad -2x_2+6x_3 \\ x_1+\ \ x_2+2x_3 \end{bmatrix}$$

によって線形変換 $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を定め, $\mathcal{C}=(g(\boldsymbol{a}_1), g(\boldsymbol{a}_2))$ とするとき, 以下の設問に答えよ.

(14) $\mathcal{B}$ が W の 1 つの基底となるように, p, q の値を定めよ. 以下, p, q をこれらの値とする.

【答】 少なくとも $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\in\langle \boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\rangle$ でなければならないから, $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ の第 2 成分, 第 3 成分に注目して,

$$\boldsymbol{a}_1=3\boldsymbol{b}_1+2\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix} 3p+2q \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2=2\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix} 2p+q \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

これより, $3p+2q=1$, $2p+q=0$ であるから, $\boxed{p=-1,\ q=2}$. このとき, $W=\langle \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\rangle\subset\langle \boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\rangle$ かつ $\dim\langle \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\rangle=\dim\langle \boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\rangle=2$ であるから, $W=\langle \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\rangle=\langle \boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\rangle$ となり, $\mathcal{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$, $\mathcal{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$ がともに W の基底であることが分かる.

(15) 基底 $\mathcal{B}$ に関する $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ の座標 $[\boldsymbol{a}_1]_{\mathcal{B}}$, $[\boldsymbol{a}_2]_{\mathcal{B}}$ を求めよ.

【答】 $p=-1$, $q=2$ のとき, (14) の結果により, $\boldsymbol{a}_1=3\boldsymbol{b}_1+2\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{a}_1=2\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$. よって,

$$\boxed{[\boldsymbol{a}_1]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},\ [\boldsymbol{a}_2]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}.$$

(16) 基底 $\mathcal{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$ から基底 $\mathcal{C}=(g(\boldsymbol{a}_1),g(\boldsymbol{a}_2))$ への基底変換行列を求めよ.

【答】 W の基底 $\mathcal{A}$ から $\mathcal{C}$ への基底変換行列を M とすれば, $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} M=\begin{bmatrix} g(\boldsymbol{a}_1) & g(\boldsymbol{a}_2) \end{bmatrix}$. このとき, $g(\boldsymbol{a}_1)=\begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$, $g(\boldsymbol{a}_2)=\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ であるから, 行基本変形により,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & g(\boldsymbol{a}_1) & g(\boldsymbol{a}_2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 & 6 \\ 0 & 2 & -24 & -16 \\ 0 & 1 & -12 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 & 6 \\ 0 & 1 & -12 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって, $M=\boxed{\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ -12 & -8 \end{bmatrix}}$. 定義により, M は $g:W\to W$ の基底 $\mathcal{A}$ に関する表現行列に他ならない.

(17) $g(W)=W$ であるから, g は W の線形変換 $g:W\to W$ とみなせる. このとき, $g:W\to W$ の基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列を求めよ.

【答】 $g:W\to W$ の $\mathcal{B}$ に関する表現行列を M' とすれば, $\begin{bmatrix} g(\boldsymbol{b}_1) & g(\boldsymbol{b}_2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} M'$. このとき,

$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $g(\boldsymbol{b}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $g(\boldsymbol{b}_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ であるから, 行基本変形により,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & g(\boldsymbol{b}_1) & g(\boldsymbol{b}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって, $M' = \boxed{\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}$.

《別法》$\mathcal{B}$ から $\mathcal{A}$ への基底変換行列を P とすれば, $g : W \to W$ の $\mathcal{A}$ に関する表現行列 M および $\mathcal{B}$ に関する表現行列 M' に対して, $M = P^{-1}M'P$ が成り立つ. (15), (16) の結果より, $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ -12 & -8 \end{bmatrix}$ であるから,

$$M' = PMP^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ -12 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}.$$

7 3 次正方行列 $M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ に対して, 以下の設問に答えよ.

(18) M の固有値をすべて求めよ.

【答】 行列 M の固有多項式は

$$F_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ -1 & \lambda + 2 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{第 1 列} \\ + \text{第 2 列}}}{=} \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 2 & -2 \\ \lambda + 1 & \lambda + 2 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & \lambda + 2 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1).$$

(もちろん, 3 次の行列式の展開公式を用いて計算してもよい.) よって, M の固有値は $\boxed{-1, 1}$.

(19) M の最大の固有値に対する固有空間の基底を 1 つ求めよ.

【答】 M の最大固有値は 1. 固有値 1 の固有ベクトルを求めるために $M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ を解く.

$$E - M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形されるので, $M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ の解は $\boldsymbol{x} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. よって, 固有値 1 の固有空間の基底は $\boxed{\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)}$.

(20) ベクトル値関数 $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$ に対する斉次線形微分方程式 $\boldsymbol{x}'(t) = M\boldsymbol{x}(t)$ の解 $\boldsymbol{x}(t)$ のうち, 初期条件 $\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ をみたす解 $\boldsymbol{x}(t)$ の第 1 成分 $x_1(t)$ を求めよ.

【答】 まず, M の固有値 -1 に対する固有ベクトルを求めるために, $M\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$ を解く.

$$-E - M = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形されるので, $M\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$ の解は $\boldsymbol{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. よって, $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ と定

めれば, P は正則行列で $P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. ここで, $\boldsymbol{x}(t) = P\boldsymbol{y}(t),\ \boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix}$ とおいて, $\boldsymbol{x}'(t) = M\boldsymbol{x}(t)$ に代入すれば,

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{bmatrix} = P^{-1}MP \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ -y_2(t) \\ -y_3(t) \end{bmatrix}. \qquad \therefore \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1e^t \\ C_2e^{-t} \\ C_3e^{-t} \end{bmatrix}$$

よって, $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1e^t \\ C_2e^{-t} \\ C_3e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2C_1e^t + (C_2 + C_3)e^{-t} \\ C_1e^t + C_2e^{-t} \\ C_1e^t - C_3e^{-t} \end{bmatrix}$. 初期条件により,

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2C_1 + C_2 + C_3 \\ C_1 + C_2 \\ C_1 - C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}. \qquad \therefore C_1 = C_2 = 1,\ C_3 = -2.$$

以上より, $x_1(t) = \boxed{2e^t - e^{-t}}$.