令和４年度 数学演習第二 期末統一試験【問題用紙】

2023 年 2 月 8 日実施・試験時間 90 分

— 解答用紙には答えのみを整理された形で記入すること —

1 次の 2 重積分の値を計算せよ．ただし，(3) の log は自然対数を表す．

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy,\qquad D:\ 0 \leqq y \leqq x \leqq 1.$

(2) $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)\,dxdy,\qquad D:\ 0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}.$

(3) $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)\,dxdy,\qquad D:\ 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ y \geqq 0.$

(4) $\displaystyle\iint_D (x+y)\,e^{x-y}\,dxdy,\qquad D:\ 0 \leqq x+y \leqq 1,\ (x+y)^2 \leqq x-y \leqq 1.$

2 (5) 連続関数 $f(x,y)$ に対して，等式

$$\int_1^2 dy \int_y^{y^2} f(x,y)\,dx = \int_1^{\boxed{\text{ア}}} dx \int_{\boxed{\text{イ}}}^{\boxed{\text{ウ}}} f(x,y)\,dy + \int_{\boxed{\text{ア}}}^{4} dx \int_{\boxed{\text{イ}}}^{\boxed{\text{エ}}} f(x,y)\,dy$$

が成り立つ．このとき，**ア** から **エ** に入るべき適切な数値または数式を答えよ．

3 (6) 3 重積分

$$I = \iiint_V \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,\qquad V:\ x^2+y^2+z^2 \leqq 1,\ z \leqq 0$$

を考える．V は極座標変換 $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ により，

$$W:\ 0 \leqq r \leqq \boxed{\text{カ}},\quad \boxed{\text{キ}} \leqq \theta \leqq \pi,\quad 0 \leqq \varphi \leqq \boxed{\text{ク}}$$

に対応する．I の値を計算すると，$I = \boxed{\text{ケ}}$ となる．このとき，**カ** から **ケ** に入るべき適切な数値または数式を答えよ．

4 2 変数関数 $g(x,y) = x^3 + 3x^2y + 3y^2 + 1$ について考える．$g(x,y) = 0$ で定義される陰関数を $y = \varphi(x)$ として，以下の設問に答えよ．

(7) $\varphi'(x)$ を x, y の有理式で表せ．

(8) $\varphi(x)$ の極値をすべて求め，解答欄には「点 $x = a$ で極大値（または極小値）b をとる」という形式で答えを記せ．

(9) $f(x,y) = x + y,\ F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y)$ とおくとき，連立方程式

$$F_x(x,y,\lambda) = 0,\quad F_y(x,y,\lambda) = 0,\quad g(x,y) = 0$$

の解 (x,y,λ) をすべて求めよ．

(10) 条件 $g(x,y) = 0$ の下で，関数 $f(x,y) = x + y$ の極値をすべて求め，解答欄には「点 (c,d) で極大値（または極小値）m をとる」という形式で答えを記せ．

5 a, b を実数の定数とする．

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 \\ 4x_1 - x_2 + ax_3 + bx_4 \end{bmatrix}$$

によって定義される線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ に対して，以下の設問に答えよ．

(11) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元 $\dim(\mathrm{Im}\, f)$ が 3 であるための a, b の条件を求めよ．

(12) $a = -7$ とする．f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元 $\dim(\mathrm{Ker}\, f)$ が 2 になるための b の条件を求めよ．

(13) $a = -7$ とする．次元 $\dim(\mathrm{Ker}\, f)$ が 1 であるとき，$\mathrm{Ker}\, f$ の基底を 1 つ求めよ．

6 p, q を実数とし，$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} p \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} q \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．そして，$W = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$, $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ とし，

$$g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ -2x_2 + 6x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

によって線形変換 $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を定め，$\mathcal{C} = (g(\boldsymbol{a}_1), g(\boldsymbol{a}_2))$ とするとき，以下の設問に答えよ．

(14) $\mathcal{B}$ が W の 1 つの基底となるように，p, q の値を定めよ．以下，p, q をこれらの値とする．

(15) 基底 $\mathcal{B}$ に関する $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の座標 $[\boldsymbol{a}_1]_{\mathcal{B}}, [\boldsymbol{a}_2]_{\mathcal{B}}$ を求めよ．

(16) 基底 $\mathcal{A}$ から基底 $\mathcal{C}$ への基底変換行列を求めよ．

(17) $g(W) = W$ であるから，g は W の線形変換 $g : W \to W$ とみなせる．このとき，$g : W \to W$ の基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列を求めよ．

7 3 次正方行列 $M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ に対して，以下の設問に答えよ．

(18) M の固有値をすべて求めよ．

(19) M の最大の固有値に対する固有空間の基底を 1 つ求めよ．

(20) ベクトル値関数 $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$ に対する斉次線形微分方程式 $\boldsymbol{x}'(t) = M\boldsymbol{x}(t)$ の解 $\boldsymbol{x}(t)$ のうち，初期条件 $\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ をみたす解 $\boldsymbol{x}(t)$ の第 1 成分 $x_1(t)$ を求めよ．