

数学演習第一 (演習第 1 回)

微積：極限值、逆三角関数

2023 年 4 月 26 日

要点

基本的な極限值

- 三角関数: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- 指数・対数関数: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ ($\Leftrightarrow e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$)

逆三角関数

- $y = \text{Sin}^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y$ ($-1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$)
- $y = \text{Cos}^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y$ ($-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi$)
- $y = \text{Tan}^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y$ ($x \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$)

1 次の極限值を求めよ。(演習書 問題 2.2.1 (2), (6), (7), (8), (11), (12), (13), (14))

- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax - \sin bx}{x}$ ($ab \neq 0$) (6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1}{x - \frac{\pi}{3}}$
- (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \tan x}$ (8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\sin x)}{\tan x}$ (11) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x$
- (12) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ (13) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ (14) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log(\tan 2x)}{\log(\tan x)}$

- (12), (13) については、まず対数をとった関数の極限值を求めよ。

2 次の値を求めよ。(演習書 問題 2.3.1 [改題])

- (5) $\sin(\text{Tan}^{-1}(-3))$ (6) $\tan(\text{Cos}^{-1}(-\frac{2}{5}))$

3 次の方程式を解け。(演習書 問題 2.3.3 [一部改題])

- (1) $\text{Cos}^{-1} x = \text{Tan}^{-1} 2$ (2) $\text{Sin}^{-1} x + 2 \text{Sin}^{-1} \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$
- (3) $\text{Tan}^{-1} x + 2 \text{Tan}^{-1} \frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}$

4 次の関係式を示せ。(演習書 問題 2.3.4 [改題])

- (1) $\text{Sin}^{-1} x + \text{Cos}^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ (2) $\text{Tan}^{-1} x + \text{Tan}^{-1} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ ($x > 0$)

※ 2, 3 のような問題では、数値として確定している部分を α などとおいてみるのがよい。

例えば、3 (1) では、 $\alpha = \text{Tan}^{-1} 2$ とおくと、 α は $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ かつ $\tan \alpha = 2$ をみたし、問題の方程式は $\text{Cos}^{-1} x = \alpha$ と表される。よって、方程式の解 x は、上の条件をみたす α に対する、 $\cos \alpha$ の値として与えられる。

5 双曲線関数

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

について、次の問いに答えよ。

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ を示せ。

但し、 $\cosh^2 x = (\cosh x)^2$ 、 $\sinh^2 x = (\sinh x)^2$ (三角関数と同様な記法)。

(2) $y = \sinh x$ および $y = \tanh x$ の逆関数をそれぞれ求めよ。

(3) $y = \cosh x$ ($x \geq 0$) および $y = \cosh x$ ($x \leq 0$) の逆関数をそれぞれ求めよ。

6 レポート課題

(1) 極限值 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x - \frac{\pi}{4}}{\cos(x + \frac{\pi}{4})}$ を求めよ。

(2) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{1/2x}$ を求めよ。

7 レポート課題

以下の問いに答えよ。

(3) $\alpha = \tan^{-1} \frac{1}{2}$ とおくとき、 $\sin 2\alpha$ および $\cos 2\alpha$ を求めよ。

(4) 方程式 $\sin^{-1} x + 2 \tan^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$ が解をもつことを示し、 x を求めよ。