数学演習第一（演習第 1 回）【解答例】

微積：極限値, 逆三角関数 (2023 年 4 月 26 日実施)

1　演習問題

$\boxed{1}$ (2) $\dfrac{\sin ax - \sin bx}{x} = \dfrac{\sin ax}{x} - \dfrac{\sin bx}{x} = \dfrac{\sin ax}{ax} \cdot a - \dfrac{\sin bx}{bx} \cdot b \to \boxed{a-b}$ $(x \to 0)$

(6) $y = x - \dfrac{\pi}{3}$ とおくと, $x \to \dfrac{\pi}{3}$ のとき $y \to 0$. このとき, $\dfrac{\sin(x+\frac{\pi}{6})-1}{x-\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\sin(y+\frac{\pi}{2})-1}{y} = \dfrac{\cos y - 1}{y} = -\dfrac{(1-\cos y)(1+\cos y)}{y(1+\cos y)} = \dfrac{-\sin^2 y}{y(1+\cos y)} = \left(\dfrac{\sin y}{y}\right)^2 \dfrac{-y}{1+\cos y} \to 1 \cdot 0 = \boxed{0}$ $(x \to 0)$.

(7) $\dfrac{1-\cos x}{x \tan x} = \dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x \sin x} \dfrac{\cos x}{1+\cos x} = \dfrac{\sin x}{x} \dfrac{\cos x}{1+\cos x} \to \boxed{\dfrac{1}{2}}$ $(x \to 0)$.

【注】 (6), (7) の解答例では, $1-\cos x$ を $1-\cos x = \dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x} = \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ と変形したが, 半角の公式を用いて $1-\cos x = 2\sin^2(x/2)$ と変形する方法もよく用いられる. この変形から容易に得られる極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ は基本的.

(8) $x \to 0$ のとき, $\sin x \to 0$ であるから, $\dfrac{\tan(\sin x)}{\tan x} = \dfrac{\sin(\sin x)}{\cos(\sin x)} \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x} \dfrac{\cos x}{\cos(\sin x)} \to \boxed{1}$ $(x \to 0)$.

【別法】 $\dfrac{\tan x}{x} = \dfrac{\sin x}{x} \cdot \cos x \to 1$ を用いて, $\dfrac{\tan(\sin x)}{\tan x} = \dfrac{\tan(\sin x)}{\sin x} \dfrac{x}{\tan x} \dfrac{\sin x}{x} \to 1$.

(11) $y = \dfrac{\pi}{2} - x$ とおくと, $x \to \dfrac{\pi}{2} - 0$ のとき $y \to +0$. このとき, $\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \tan x = y \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) = \dfrac{y}{\tan y} = \dfrac{y}{\sin y} \cdot \cos y \to \boxed{1}$.

(12) 自然対数をとって考える. $y = 1-x$ $(x = 1-y)$ とおくと, $x \to 1$ のとき $y \to 0$ であり, $\log x^{\frac{1}{1-x}} = \dfrac{\log x}{1-x} = \dfrac{\log(1-y)}{y} \to -1$. よって, $x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\log x^{\frac{1}{1-x}}} \to \boxed{e^{-1}}$ $\left(= \dfrac{1}{e}\right)$.

(13) 自然対数をとって考える. $\cos x = 1 + (\cos x - 1)$ と分解し, (7) と同様な計算を用いて ((7) の【注】も参照), $\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{\log(\cos x)}{x^2} = \dfrac{\log(1+\cos x - 1)}{x^2} = \dfrac{\log(1+(\cos x - 1))}{\cos x - 1} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} \to 1 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$ $(x \to 0)$. よって, $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}} \to \boxed{e^{-1/2}}$ $\left(= \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

(14) $x \to +0$ のとき, $\sin x \to +0$, $\log(\sin x) \to -\infty$ より, $\dfrac{\log(\tan 2x)}{\log(\tan x)} = \dfrac{\log(\sin 2x) - \log(\cos 2x)}{\log(\sin x) - \log(\cos x)} = \dfrac{\log(\sin x) + \log(2\cos x) - \log(\cos 2x)}{\log(\sin x) - \log(\cos x)} = \dfrac{1 + \frac{\log(2\cos x) - \log(\cos 2x)}{\log(\sin x)}}{1 - \frac{\log(\cos x)}{\log(\sin x)}} \to \boxed{1}$

$\boxed{2}$ (5) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}(-3)$ とおいて, $\sin\alpha$ の値を求める. $\tan\alpha = -3$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから, $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha = 10$. これより, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ なので, $\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = \boxed{-\dfrac{3}{\sqrt{10}}}$.

(6) $\alpha = \mathrm{Cos}^{-1}\left(-\dfrac{2}{5}\right)$ とおいて, $\tan\alpha$ の値を求める. $\cos\alpha = -\dfrac{2}{5}$ $(0 \leq \alpha \leq \pi)$ であるから, $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \dfrac{21}{25}$ となり, $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$. よって, $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{21}/5}{-2/5} = \boxed{-\dfrac{\sqrt{21}}{2}}$.

$\boxed{3}$ (1) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1} 2$ とおくと, $\tan\alpha = 2 > 0$ かつ $\mathrm{Cos}^{-1} x = \alpha$. このとき, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であるから, $\mathrm{Cos}^{-1} x = \alpha$ は解をもち, $x = \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$ で与えられる.

(2) $\alpha = \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{4}$ とおくと, $\sin\alpha = \dfrac{1}{4} > 0$ かつ $\mathrm{Sin}^{-1} x = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha$. このとき, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であるから, $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha < \dfrac{\pi}{2}$. よって, $\mathrm{Sin}^{-1} x = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha$ は解をもち, $x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \boxed{\dfrac{7}{8}}$ で与えられる.

(3) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{5}$ とおくと, $\tan\alpha = \dfrac{1}{5} \in (0,1)$ かつ $\mathrm{Tan}^{-1} x = \dfrac{\pi}{4} - 2\alpha$. このとき, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ であるから, $-\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{4} - 2\alpha < \dfrac{\pi}{4}$. よって, $\mathrm{Tan}^{-1} x = \dfrac{\pi}{4} - 2\alpha$ は解をもち, $x = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan 2\alpha}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan 2\alpha} = \dfrac{1 - \tan 2\alpha}{1 + \tan 2\alpha}$ で与えられる. ここで, $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \dfrac{5}{12}$ であるから, $x = \dfrac{1 - \frac{5}{12}}{1 + \frac{5}{12}} = \boxed{\dfrac{7}{17}}$ となる.

【注】この種の方程式は解をもたないことがある. 例えば,

- $\mathrm{Cos}^{-1} x = \mathrm{Tan}^{-1}(-2)$ は $\boxed{3}$ (1) と似ているが, 解をもたない. 実際, $\mathrm{Tan}^{-1}(-2) \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ は関数 $\mathrm{Cos}^{-1} x$ の値域 $[0, \pi]$ に含まれない.
- レポート課題の $\boxed{\text{問題 4}}$ に似た問題 $\mathrm{Sin}^{-1} x + 2\,\mathrm{Cos}^{-1}(-3/4) = \pi$ も解をもたない. なぜか？

$\boxed{4}$ (1) $\theta = \mathrm{Sin}^{-1} x$ とおくと, $\sin\theta = x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right)$. このとき $x = \sin\theta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ かつ $0 \le \dfrac{\pi}{2} - \theta \le \pi$ であるから, Cos^{-1} の定義により $\dfrac{\pi}{2} - \theta = \mathrm{Cos}^{-1} x$. よって, $\mathrm{Sin}^{-1} x + \mathrm{Cos}^{-1} x = \theta + \left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

(2) $\theta = \mathrm{Tan}^{-1} x$ とおくと, $\tan\theta = x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$. ここで, $x > 0$ より $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. このとき,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

かつ $0 < \dfrac{\pi}{2} - \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから, Tan^{-1} の定義により $\dfrac{\pi}{2} - \theta = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{x}$. よって, $\mathrm{Tan}^{-1} x + \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{x} = \theta + \left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

【注】 $x < 0$ のときには, $\mathrm{Tan}^{-1} x + \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ.

$\boxed{5}$ (1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) = e^x \cdot e^{-x} = 1$.

(2) $X = e^x > 0$ とおけば,

- $y = \sinh x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \dfrac{1}{2}\left(X - \dfrac{1}{X}\right)$ より, $X^2 - 2yX - 1 = 0$. これを X に関する 2 次方程式とみなして, $X > 0$ なる解は $X = e^x = y + \sqrt{y^2+1}$. よって, $y = \sinh x$ の逆関数は $\boxed{x = \log(y + \sqrt{y^2+1}\,)}$.
- $y = \tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{X - X^{-1}}{X + X^{-1}} = \dfrac{X^2 - 1}{X^2 + 1}$ より $X^2 = e^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y}$ (> 0). この X に関する 2 次方程式の $X > 0$ なる解は $X = \sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$. よって, $y = \tanh x$ の逆関数は $\boxed{x = \log\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}}$ $\left(\text{あるいは}\ \boxed{x = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+y}{1-y}}\right)$.

(3) $X = e^x > 0$ とおけば, $y = \cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \dfrac{1}{2}\left(X + \dfrac{1}{X}\right) \ge 1$ となり, $X^2 - 2yX + 1 = 0$. このとき, $y \ge 1$ であるから, この X に関する 2 次方程式は実数解 $X = y \pm \sqrt{y^2-1}$ をもつ.

- $x \ge 0$ ならば, $X = e^x \ge 1$ より, $X = y + \sqrt{y^2-1}$. よって, $y = \cosh x$ $(x \ge 0)$ の逆関数は $\boxed{x = \log(y + \sqrt{y^2-1}\,)}$.

- $x \leq 0$ ならば, $X = e^x \in (0,1]$ より, $X = y - \sqrt{y^2-1} = \dfrac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}$. よって, $y = \cosh x$ $(x \leq 0)$ の逆関数は $\boxed{x = -\log(y+\sqrt{y^2-1})}$ $\left(\text{あるいは } \boxed{x = \log(y-\sqrt{y^2-1})}\right)$.

2　レポート課題

$\boxed{6}$ (1) $y = x - \dfrac{\pi}{4}$ とおくと, $x \to \dfrac{\pi}{4}$ のとき $y \to 0$. このとき, $\dfrac{x-\frac{\pi}{4}}{\cos(x+\frac{\pi}{4})} = \dfrac{y}{\cos(y+\frac{\pi}{2})} = \dfrac{y}{-\sin y} \to \boxed{-1}$ $(x \to 0)$.

(2) 自然対数をとって考える. $\log(1-\sin x)^{\frac{1}{2x}} = \dfrac{\log(1-\sin x)}{2x} = \dfrac{\log(1-\sin x)}{-\sin x}\dfrac{\sin x}{x} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) \to -\dfrac{1}{2}$ $(x \to 0)$. よって, $(1-\sin x)^{\frac{1}{2x}} = e^{\log(1-\sin x)^{\frac{1}{2x}}} \to \boxed{e^{-1/2}}$ $(x \to 0)$.

$\boxed{7}$ (3) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{2}$ とおくと, $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$ より, $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha = \dfrac{5}{4}$. これより, $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ および, $\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ なので, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \boxed{\dfrac{4}{5}}$ および, $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \boxed{\dfrac{3}{5}}$.

(4) (3) の α について, $\mathrm{Sin}^{-1} x = \dfrac{\pi}{4} - 2\alpha$. ここで, $\tan\alpha = \dfrac{1}{2} \in (0,1)$ より, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ であるから, $-\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{4} - 2\alpha < \dfrac{\pi}{4}$. よって, $\mathrm{Sin}^{-1} x = \dfrac{\pi}{4} - 2\alpha$ は解をもち, $x = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = \sin\dfrac{\pi}{4}\cos 2\alpha - \cos\dfrac{\pi}{4}\sin 2\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{4}{5} = \boxed{-\dfrac{1}{5\sqrt{2}}}$.