数学演習第一（演習第 2 回）

線形：平面の方程式, 行列の演算

2023 年 5 月 10 日

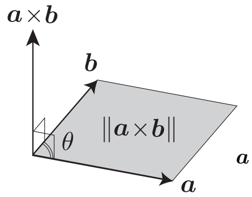
要点 1

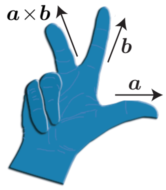
《表記上の注意》

- 高校ではベクトルを $\overrightarrow{p}$ (矢印) の形で表したが, ここでは $\boldsymbol{p}$ (太字) と表記する．零ベクトルは $\boldsymbol{0}$ で表す．
- ベクトル $\boldsymbol{p}$ に対して,「点 $\boldsymbol{p}$」は $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ (O は原点) となる点 P を表す ($\boldsymbol{p}$ は点 P の位置ベクトル).

I 空間ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ に対して,

- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, $\|\boldsymbol{a}\| := \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の**内積**, $\boldsymbol{a}$ の**長さ** (**大きさ**, **ノルム**) という．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のとき, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を $\theta \in [0, \pi]$ とすれば, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$ が成り立つ．(平面ベクトルの場合も同様.)
- $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}' + \boldsymbol{b}''$ $(\underset{\boldsymbol{a}\text{に平行}}{\boldsymbol{b}' = k\boldsymbol{a}},\ \underset{\boldsymbol{a}\text{に垂直}}{\boldsymbol{b}'' \cdot \boldsymbol{a} = 0})$ の形に分解できる．このとき, $\boldsymbol{b}'$ を $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ に平行な直線」への**正射影**, $\boldsymbol{b}''$ を $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ に垂直な平面」への**正射影**と呼ぶ．(平面ベクトルの場合, $\boldsymbol{b}''$ は $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ に垂直な直線」への正射影となる.)
- $\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} := \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の **外積** (線形 p. 8) (= **ベクトル積**) と呼ぶ．





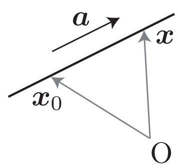
  $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ が平行でないとき, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を $\theta \in (0, \pi)$ とすれば,

  ① $\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \text{ は } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ の両方に垂直}}$,　② $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は右手系,

  ③ $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta$ $= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積).

II 空間の点 $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \neq \boldsymbol{0}$ に対して,

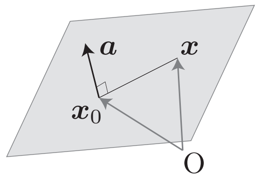
- 点 $\boldsymbol{x}_0$ を通り, $\boldsymbol{a}$ を**方向ベクトル**とする直線 ($\boldsymbol{a}$ に平行な直線) の方程式は, (線形 p. 11)



$$\underset{\text{(ベクトル方程式)}}{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}} \left(\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \right) \text{ より, } \boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}.$$

  (右上の表現は $abc \neq 0$ の場合の形．例えば $ab \neq 0, c = 0$ なら, $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}, z = z_0$ となる.)

- 点 $\boldsymbol{x}_0$ を通り, $\boldsymbol{a}$ を**法線ベクトル**とする平面 ($\boldsymbol{a}$ に垂直な平面) の方程式は, (線形 p. 12)



$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0, \text{　すなわち　} \boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}.$$

  (右上の表現は通常 $ax + by + cz + d = 0$ または $ax + by + cz = d$ の形に整理する.)

要点 2

- $l \times m$ 行列 A と $m \times n$ 行列 B に対して, $l \times n$ 行列 AB (A, B の**積**) が次により定義される: AB の (i, j) 成分は A の第 i 行と B の第 j 列の "内積" である．また, B の (i, j) 成分を (j, i) 成分とする $n \times m$ 行列を B の**転置行列**と呼び, ${}^{t}B$ で表す．
- 同じサイズの正方行列 A, B に対して, 積 AB, BA が定義されるが, 数の場合と異なり,「$AB = BA$」「$AB = O \Rightarrow A = O \text{ or } B = O$」が成り立つとは限らない．
- 正方行列 A に対して, $AB = BA = E$ (E は単位行列) を満たす B が存在するとき (存在すれば一意), B を A の**逆行列**と呼び, A^{-1} で表す．また, 逆行列をもつ行列を**正則行列**という．2 次正方行列では

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ が正則 } \Leftrightarrow ad - bc \neq 0. \text{　このとき, } A \text{ の逆行列は } \boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}.$$

1　演習問題

$\boxed{1}$ ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ に対して, 以下を計算せよ. ((4), (5) については線形第 1 節参照)

(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$　(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角　(3) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$　(4) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 $(= \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|)$

(5) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積 $(= |(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}|)$　(6) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の作る四面体の体積

$\boxed{2}$ 空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, かつ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は平行でない) に対して, 次の主張を示せ.

(i) $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ に平行な直線」への正射影は $\boldsymbol{b}' = \dfrac{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2} \boldsymbol{a}$, その長さは $\|\boldsymbol{b}'\| = \dfrac{|\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}|}{\|\boldsymbol{a}\|}$.

(ii) $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ に垂直な平面」への正射影は $\boldsymbol{b}'' = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b} - \dfrac{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2} \boldsymbol{a}$, その長さは $\|\boldsymbol{b}''\| = \dfrac{\|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$.

更に, $\boxed{1}$ の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して, 以下を計算せよ.

(7) $\boldsymbol{c}$ の「$\boldsymbol{a}$ に平行な直線」への正射影　(8) $\boldsymbol{c}$ の「$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に平行な平面」への正射影

$\boxed{3}$ 空間の 3 点 $\mathrm{A}(1, 0, 2)$, $\mathrm{B}(2, -2, 1)$, $\mathrm{C}(-1, 2, 0)$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 2 点 A, B を通る直線 (直線 AB と呼ぶ) の方程式を求めよ. (ヒント: $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が方向ベクトル)

(2) 3 点 A, B, C を通る平面 (平面 ABC と呼ぶ) の方程式を求めよ. (ヒント: $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が法線ベクトル)

(3) 原点 O から平面 ABC に下ろした垂線の長さを求めよ.

(4) 点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さを求めよ.

$\boxed{4}$ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ のとき, 次の行列を求めよ.

(1) $2A - 3B$　(2) $2X + 3A = B$ を満たす行列 X　(3) BC　(4) $A\,{}^{\mathrm{t}}C\,{}^{\mathrm{t}}B$

$\boxed{5}$ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の逆行列, 正則性について考える.

(1) $(A - aE)(A - dE)$ (E は 2 次単位行列) を計算して, 次の関係式を導け:

$$\boxed{A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O}.$$

(2) $\widetilde{A} := (a+d)E - A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ とおくとき, (1) の関係式から, $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (ad - bc)E$ を導け.

(3) (2) で導いた関係式を用いて, 次の主張を示せ.

① $ad - bc \neq 0$ ならば, A は正則であり, その逆行列は $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\widetilde{A} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

② $ad - bc = 0$ ならば, A は正則でない.

$\boxed{6}$ 2 次正則行列の逆行列の公式を用いて, 次の問いに答えよ.

(1) 次の行列の逆行列を求めよ:　① $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$,　② $\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$ $(r \neq 0)$.

(2) $A = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ のとき, $AX = B$ を満たす行列 X を求めよ.

$\boxed{7}$ 次を満たす 2 次正方行列 P, Q_θ, R_θ を定めよ.

(1) 点 (x, y) を x 軸に関して対称移動した点を (x', y') とするとき, 2 点の関係を $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の形に書き表せ.

(2) 点 (x, y) を原点の周りに θ だけ回転移動した点を (x', y') とするとき, 2 点の関係を $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q_\theta\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の形に書き表せ. 【ヒント】複素数平面上で考えれば, $x' + iy' = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy)$ と書ける.

(3) x 軸を原点の周りに θ だけ回転移動した直線を ℓ_θ とする．点 (x, y) を ℓ_θ に関して対称移動した点を (x', y') とするとき, 2 点の関係を $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の形に書き表せ.

【ヒント】点 (x, y) を, まず原点の周りに $-\theta$ だけ回転移動し (この回転移動で ℓ_θ は x 軸に重なる), 次に x 軸に関して対称移動し, 最後に原点の周りに θ だけ回転移動すれば点 (x', y') が得られる.

2　レポート問題（WebClass 提出用）

答案 (計算過程も含める) を A4 用紙 (複数枚用いてよい) にまとめ, pdf 書類に変換して提出して下さい.

問 1　3 点 $\mathrm{A}(1, 2, -1)$, $\mathrm{B}(0, 3, 2)$, $\mathrm{C}(-2, 1, 1)$ を通る平面の方程式を求めよ．さらに, この平面と点 A で直交する直線の方程式を求めよ．【ヒント】 まず, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ.

問 2　$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ のとき, 次を満たす零行列でない 2 次正方行列 B をそれぞれ挙げよ (1 つずつでもよいが, 可能ならすべての場合を考えよ).

(1)　$AB = O$　　(2)　$BA = O$　　(3)　$AB \neq BA$

問 3　$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ の中から異なる 2 つの行列を選んで並べたとき, 積が定義されるようなすべての並べ方を挙げ, それぞれの積を計算せよ.

問 4　$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ のとき, <u>2 次正則行列の逆行列の公式を利用して</u>, $XA = AB$ を満たす行列 X を求めよ.