数学演習第一（演習第 3 回）【解答例】

微積：合成関数の微分法, 逆関数の微分法等 (2023 年 5 月 17 日実施)

1 (1) $a^x = (e^{\log a})^x = e^{x\log a}$, $(e^x)' = e^x$ より，$f'(x) = (e^{x\log a})' = e^{x\log a}\log a = \boxed{a^x \log a}$.

(2) 対数の底の変換公式 $\log_a |x| = \dfrac{\log|x|}{\log a}$ と $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$ から，$f'(x) = (\log_a|x|)' = \boxed{\dfrac{1}{x\log a}}$.

(3) $(\sqrt{x}\,)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ と合成関数の微分法により，

$$f'(x) = \frac{(x+2\sqrt{x}\,)'}{2\sqrt{x+2\sqrt{x}}} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+2\sqrt{x}}} = \boxed{\frac{1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+2\sqrt{x}}}}.$$

(4) $\log|f(x)| = \dfrac{1}{3}\log(x^2+1) - \log|x-1|$ の両辺を x で微分すると，

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x}{3(x^2+1)} - \frac{1}{x-1} = \frac{-(x^2+2x+3)}{3(x-1)(x^2+1)}.$$

$$\therefore\ f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x-1}\cdot\frac{-(x^2+2x+3)}{3(x-1)(x^2+1)} = \boxed{-\frac{x^2+2x+3}{3(x-1)^2(x^2+1)^{2/3}}}.$$

(5) まず, $f(x)$ の分子・分母に $\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}$ をそれぞれ掛けて，

$$f(x) = \frac{(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}\,)^2}{(a^2+x^2)-(a^2-x^2)} = \frac{a^2}{x^2} + \frac{\sqrt{a^4-x^4}}{x^2}.$$

これを x で微分すると，

$$f'(x) = -\frac{2a^2}{x^3} - \frac{2x}{\sqrt{a^4-x^4}} - \frac{2\sqrt{a^4-x^4}}{x^3} = \boxed{-\frac{2a^2}{x^3}\left(1+\frac{a^2}{\sqrt{a^4-x^4}}\right)}.$$

(6) $\log f(x) = (\cos x)\log(\sin x)$ より，$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = (-\sin x)\cdot\log(\sin x) + \cos x\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}$. よって，

$$f'(x) = f(x)(\log f(x))' = \boxed{(\sin x)^{\cos x}\left\{-(\sin x)\log(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right\}}$$

(7) まず, $g(x) = x^x$ とおけば，$\log g(x) = x\log x$ より，

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \log x + x\cdot\frac{1}{x} = \log x + 1,\quad g'(x) = x^x(\log x + 1).$$

(あるいは，$g'(x) = (e^{x\log x})' = e^{x\log x}\cdot(x\log x)' = x^x(\log x+1)$ と計算することもできる.)　よって，$f(x) = x^{g(x)}$, $\log f(x) = g(x)\log x$ より，

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x)\log x + \frac{g(x)}{x} = x^x\Big((\log x+1)\log x + \frac{1}{x}\Big),\quad f'(x) = \boxed{x^{x^x+x}\Big((\log x+1)\log x+\frac{1}{x}\Big)}.$$

2 (1) $y = \mathrm{Sin}^{-1}x$ とおけば，$x = \sin y$ $\left(-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$, $\dfrac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-x^2}$ より，$\dfrac{dy}{dx} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

(2) $y = \mathrm{Cos}^{-1}x$ とおけば，$x = \cos y$ $(0\le y\le\pi)$, $\dfrac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1-x^2}$ より，$\dfrac{dy}{dx} = \boxed{-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

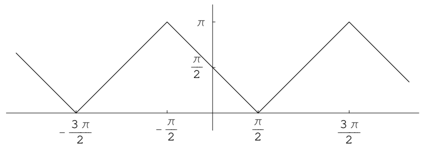
(3) $y = \mathrm{Tan}^{-1}x$ とおけば，$x = \tan y$ $\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$, $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\cos^2 y} = 1+x^2$ より，$\dfrac{dy}{dx} = \boxed{\dfrac{1}{1+x^2}}$.

3 (1) $f'(x) = 2\,\mathrm{Sin}^{-1}x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \boxed{\dfrac{2\,\mathrm{Sin}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}}$.

(2) $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \boxed{\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}}$.

(3) $f'(x) = \dfrac{1}{1+(1-x)} \cdot \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \boxed{\dfrac{1}{2(x-2)\sqrt{1-x}}}.$

(4) $f'(x) = -\dfrac{(\sin x)'}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \boxed{-\dfrac{\cos x}{|\cos x|}} = \boxed{\begin{cases} -1 & (\cos x > 0) \\ 1 & (\cos x < 0) \end{cases}}.$



《注》 上の事実と $\mathrm{Cos}^{-1}(\sin n\pi) = \mathrm{Cos}^{-1}\, 0 = \dfrac{\pi}{2}\ \ (n \in \mathbb{Z})$
より, $y = \mathrm{Cos}^{-1}(\sin x)$ ($\mathbb{R}$ 上で連続) のグラフは右の通り.

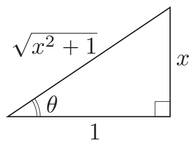
(5) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-1/x^2}{1+(1/x)^2} = \boxed{0}$. ($f(x)$ は $x \neq 0$ で定義され, 微分可能.)

《注》 $\mathrm{Tan}^{-1}(\pm 1) = \pm\dfrac{\pi}{4}$ であるから上と合わせて, $f(x) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ $(x \gtrless 0)$ (複号同順).

(6) $f'(x) = \left(\mathrm{Sin}^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \dfrac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - x \cdot \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} = \boxed{\dfrac{1}{x^2+1}}.$

《注》結果を不思議に思うかもしれないが, $\boxed{\mathrm{Sin}^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{Tan}^{-1} x}$ が成り立つので当然である. この関係式は次のように示される: $\theta = \mathrm{Sin}^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ とおけば, $\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \in (-1,1)$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = x$ となるから, θ の表現として枠内の関係式が得られる. 実は, 更に

$$\mathrm{Sin}^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{Tan}^{-1} x = \pm\, \mathrm{Cos}^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (\pm x \geq 0)$$



が成り立つ (複号同順). この式は $x \geq 0$ の場合は上の計算から直ちに従う (右図を見れば一目瞭然). $x \leq 0$ の場合は x を $-x$ で置き換え, $\mathrm{Sin}^{-1}, \mathrm{Tan}^{-1}$ が奇関数であることに注意すればよい.

4 双曲線関数 $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ については微積教科書 p.19 参照. 特に, 次の性質は重要 (三角関数の場合と比較せよ):

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

これらの性質は定義を用いて容易に確認できる (see **要点**).

(1) まず, $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \sinh x = \pm\infty$ (複号同順) と中間値の定理により, $y = \sinh x$ の値域は $\mathbb{R}$ 全体. また, $\dfrac{dy}{dx} = \cosh x = \sqrt{1+\sinh^2 x} = \sqrt{1+y^2}$ である. $\dfrac{dy}{dx} > 0$ と $y = \sinh x$ の全射性により, $y = \sinh x$ の逆関数は $\mathbb{R}$ 全体で定義される. その導関数は $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$. 従って, $\boxed{(\sinh^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$.

【別解】 $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$ により $x = \log(y + \sqrt{1+y^2})$ と具体的な形を求めることができる. よって, その導関数は

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}}\left(1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

(2) $y = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ は, 偶関数で, $x \geq 0$ において $y \geq 1$, $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \cosh x = \infty$ の単調増加関数である. また, $\dfrac{dy}{dx} = \sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1} = \sqrt{y^2-1}$ である. $\dfrac{dy}{dx} > 0$ により, $y = \cosh x$ $(x \geq 0)$ の逆関数は $y \geq 1$ で定義される. その導関数は $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$. 従って, $\boxed{(\cosh^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$ $(x > 1)$.

【別解】 $e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$ $(x \geq 0)$ により $x = \log(y + \sqrt{y^2-1})$ と具体的な形を求めることができる. よって, その導関数は

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}\left(1 + \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

(3) まず, $\tanh x = 1 - \dfrac{2}{e^{2x}+1}$ より, $y = \tanh x$ の値域は $-1 < y < 1$ である. また, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x = 1 - y^2$ である. これにより $\dfrac{dy}{dx} > 0$ であることがわかり, $y = \tanh x$ の逆関数は $-1 < y < 1$

で定義される．その導関数は $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{1-y^2}$．従って，$\boxed{(\tanh^{-1}x)'=\dfrac{1}{1-x^2}}$．

【別解】 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\ \Leftrightarrow\ e^{2x}=\dfrac{1+y}{1-y}$ に注意する．$e^{2x}>0$ なので，この等式を満たす $x\in\mathbb{R}$ が存在するための条件は $-1<y<1$ であり，このとき $x=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+y}{1-y}\left(=\log\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}\right)$ を得る．よって，その導関数は

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\{\log(1+y)-\log(1-y)\}=\frac{1}{1-y^2}\quad(-1<y<1).$$

《注》 $\sinh x$, $\tanh x$ はともに $\mathbb{R}$ 上で単調増加であるから，(実数値関数を考える限りは) 逆関数 $\sinh^{-1}x$, $\tanh^{-1}x$ の表記に曖昧さはない．一方，$\cosh x$ では定義域を $x\geq 0$, $x\leq 0$ に制限して得られる 2 通りの逆関数が考えられ，通常は $\cosh x$ $(x\geq 0)$ の逆関数に対して $\cosh^{-1}x$ を割り当てる．曖昧さをなくすために，$\sinh^{-1}x$, $\cosh^{-1}x$, $\tanh^{-1}x$ の代わりに $\mathrm{Sinh}^{-1}x$, $\mathrm{Cosh}^{-1}x$, $\mathrm{Tanh}^{-1}x$ という記号を用いることもある (微積教科書 p.31 の 3 を参照):

$$\mathrm{Sinh}^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2+1}),\quad \mathrm{Cosh}^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2-1}),\quad \mathrm{Tanh}^{-1}x=\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

実は，複素数値関数としては $\sinh x$, $\tanh x$ でも x の範囲を制限しないと逆関数が一意に定まらない (詳細は省略) ので，複素数値の場合も考慮して，上の形の “標準的な” 逆関数を $\mathrm{Sinh}^{-1}x$, $\mathrm{Cosh}^{-1}x$, $\mathrm{Tanh}^{-1}x$ と表そうという訳である．

5 (1) $f'(x)=\{\mathrm{Tan}^{-1}(\sinh x)\}'=\dfrac{(\sinh x)'}{1+\sinh^2 x}=\dfrac{\cosh x}{\cosh^2 x}=\boxed{\dfrac{1}{\cosh x}}$．

(2) $(\sinh^{-1}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ を用いて， $f'(x)=\{\sinh^{-1}(\tan x)\}'=\dfrac{(\tan x)'}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$．ここで，$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$，$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ より，$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\sqrt{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot|\cos x|=\boxed{\dfrac{1}{|\cos x|}}$．

レポート課題

(1) $g(x)=\dfrac{(x-1)^3}{x^2(x+1)}$ とおけば，$\log|g(x)|=3\log|x-1|-2\log|x|-\log|x+1|$．両辺を x で微分して，

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{4x+2}{x(x-1)(x+1)}.$$

$$\therefore\ g'(x)=\frac{4x+2}{x(x-1)(x+1)}\cdot\frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)}=\boxed{\frac{2(2x+1)(x-1)^2}{x^3(x+1)^2}}.$$

対数微分法の代わりに商の微分公式を用いて，

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{3(x-1)^2\cdot x^2(x+1)-(x-1)^3\cdot(3x^2+2x)}{x^4(x+1)^2}\quad(\text{約分に注意})\\&=\frac{\{3x(x+1)-(x-1)(3x+2)\}(x-1)^2}{x^3(x+1)^2}=\frac{(4x+2)(x-1)^2}{x^3(x+1)^2}.\end{aligned}$$

あるいは，$g(x)=(x-1)^3\cdot\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{1}{x+1}$ に積の微分公式を適用してもよい．

(2) $(\mathrm{Cos}^{-1}x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を用いて， $(\mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{x})'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\boxed{-\dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}}$．

(3) $(\tanh^{-1}x)'=\dfrac{1}{1-x^2}$ を用いて， $f'(x)=\{\tanh^{-1}(\cos x)\}'=\dfrac{(\cos x)'}{1-\cos^2 x}=\dfrac{-\sin x}{\sin^2 x}=\boxed{-\dfrac{1}{\sin x}}$．

(4) $(\tanh x)'=\left(\dfrac{\sinh x}{\cosh x}\right)'=\dfrac{1}{\cosh^2 x}=1-\tanh^2 x$ を用いて，

$$f'(x)=\{\tan^{-1}(\tanh x)\}'=\frac{(\tanh x)'}{1+\tanh^2 x}=\frac{1-\tanh^2 x}{1+\tanh^2 x}=\frac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\cosh^2 x+\sinh^2 x}$$

ここで，$\cosh^2 x=\dfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}$，$\sinh^2 x=\dfrac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}$ より，$f'(x)=\dfrac{2}{e^{2x}+e^{-2x}}=\boxed{\dfrac{1}{\cosh 2x}}$．