数学演習第一（演習第 4 回）【解答例】

線形：行列の基本変形, 簡約行列, 行列の階数（2023 年 5 月 24 日実施）

1 演習問題

$\boxed{1}$ (1) 第 1 行の主成分が 1 でないので (ii) に反する．また，第 2 行の主成分が第 1 行の主成分より左にあるので (iii) に反する．$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)\times\text{①}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}\leftrightarrow\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(2) 第 1 行は零ベクトルであるが, 第 2 行は非零ベクトルであるため (i) に反する．また, 第 2 行の主成分が 1 でないので (ii) に反する．$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}\leftrightarrow\text{②}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\times\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(3) 第 2 行は零ベクトルであるが, 第 3 行は非零ベクトルであるため (i) に反する．また, 第 3 行の主成分が第 2 列にあるが, 第 2 列には他にも 0 でない成分があるため (iv) に反する．

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②}\leftrightarrow\text{③}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}+2\times\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(4) 第 1 行は零ベクトルであるが, 第 2 行は非零ベクトルであるため (i) に反する．また, 第 2 行の主成分が 1 でないので (ii) に反する．さらに, 第 3 行の主成分が第 2 行の主成分より左にあるので (iii) に反する．最後に, 第 2 行の主成分が第 4 列にあるが, 第 4 列には他にも 0 でない成分があるため (iv) に反する．

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5}\times\text{②}]{\text{①}\leftrightarrow\text{③}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}-4\times\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{2}$

$$\begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}\leftrightarrow\text{③}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③}-7\times\text{①}]{\text{②}-6\times\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -14 \\ 0 & -7 & -14 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{7}\times\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -14 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③}+7\times\text{②}]{\text{①}-2\times\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{3}$ 簡約行列の主成分を枠で囲んで示しておく．簡約行列の主成分の個数がもとの行列の階数である．スペースの関係で省略するが, これ以外の手順もあり得る．

(1) $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}\times\text{②}]{\frac{1}{3}\times\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②}-\text{①}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

階数は 1.

(2)

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{③}-1\times\text{②}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}\leftrightarrow\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②}-2\times\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{①}+\frac{3}{2}\times\text{②}]{\text{③}+\text{②}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-\frac{1}{2})\times\text{②}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1/2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

階数は 2.

(3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 10 & 5 & 7 \\ 3 & 10 & 14 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{④}-2\times\text{①}]{\substack{\text{②}-2\times\text{①} \\ \text{③}-3\times\text{①}}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{④}+\text{②}]{\substack{\text{①}-3\times\text{②} \\ \text{③}-\text{②}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -21 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-\frac{1}{5})\times\text{②}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -21 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{①}-7\times\text{③}]{\text{①}+21\times\text{③}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$ 階数は 3.

(4)

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\times\text{③}]{\substack{\frac{1}{3}\times\text{①} \\ -\frac{1}{2}\times\text{②}}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{④}-2\times\text{③}]{\text{②}-\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②}\leftrightarrow\text{③}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{③\leftrightarrow④} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{階数は } 3.$$

注意: $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ の形の行列の簡約行列は, A, B の簡約行列を A', B' とおくと, $\begin{bmatrix} A' & O \\ O & B' \end{bmatrix}$ で行零ベクトルを下に集めたものになる.

$\boxed{4}$ (1) 基本行列は 3×3 行列. $A \xrightarrow{①+(-5)\times②} B$ なので, $B = P_{12}(-5)A$. 従って, $M = P_{12}(-5) = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) 基本行列は 3×3 行列. $A \xrightarrow{2\times③} \bullet \xrightarrow{①\leftrightarrow③} B$ なので, $B = P_{13}P_3(2)A$. 従って,

$$M = P_{13}P_3(2) = P_{13} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

積を「計算」する必要はなく, P_{13} に対応する行基本変形を施せばよいことに注意.

$\boxed{5}$ 基本行列は 2×2 行列. $\boxed{3}$ (1) の解説から, $B = P_{21}(-1)P_2(-1/2)P_1(1/3)A$. 従って,

$$M = P_{21}(-1)P_2(-1/2)P_1(1/3) = P_{21}(-1)P_2(-1/2) \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P_{21}(-1) \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

《補足》 $MA = B$ を満たす行列 M に一意性はなく, ある $a, b \in \mathbb{R}$ で $\begin{bmatrix} 1/3+2a & 3a \\ -1/3+2b & -1/2+3b \end{bmatrix}$ と表せる行列なら全て正解である. 実際, M' を $M'A = B$ を満たす一般の行列とすると $(M' - M)A = O$ より, $M' - M = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$ とおけば,

$$\begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3s-2t & -6s+4t & 9s-6t \\ 3u-2v & -6u+4v & 9u-6v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって, $(s, t, u, v) = (2a, 3a, 2b, 3b)$ $(a, b \in \mathbb{R})$ となり,

$$M' = M + \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix} = M + \begin{bmatrix} 2a & 3a \\ 2b & 3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3+2a & 3a \\ -1/3+2b & -1/2+3b \end{bmatrix}.$$

$\boxed{6}$ 階数が判った時点で計算を終了してよい (階数を求めるだけなら簡約行列まで変形する必要はない).

(1) $$\begin{bmatrix} a-5 & 4 \\ -2 & 2 \\ -3 & a+2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-\frac{1}{2})\times②} \begin{bmatrix} a-5 & 4 \\ 1 & -1 \\ -3 & a+2 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a-5 & 4 \\ -3 & a+2 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+3\times①]{②-(a-5)\times①} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & a-1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix}$$

よって,

- $a \neq 1$ のとき階数は 2,
- $a = 1$ のとき階数は 1.

(2) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-a^2\times①]{②-a\times①} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-(b+a)\times②} B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) \end{bmatrix}.$$

- $a \neq b$ のとき, $b \neq c$ かつ $c \neq a$ ならば階数は 3, $b = c$ または $c = a$ ならば階数は 2 である.
- $a = b$ のとき, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-(c-a)\times②} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 従って, $c \neq a$ ならば階数は 2, $c = a$ ならば階数は 1 である.

以上をまとめて,

- a, b, c の全て異なれば階数は 3,
- いずれか二つが一致し, もう一つが異なるならば階数は 2,
- 全てが一致する $(a = b = c)$ ならば階数は 1.

《補足》簡約行列は以下の通り.

- a, b, c がすべて異なるとき $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (階数は 3)
- $a \neq b = c$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b \neq a = c$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $a = b \neq c$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (階数は 2)
- $a = b = c$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (階数は 1)

(3)

- $a \neq 0$ のとき, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/a)\times①} \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{②-c\times①} \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & (ad-bc)/a \end{bmatrix}$ より,
  $ad - bc \neq 0$ なら階数は 2, $ad - bc = 0$ なら階数は 1 である.
- $c \neq 0$ のとき, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow③} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/c)\times①} \begin{bmatrix} 1 & d/c \\ a & b \end{bmatrix} \xrightarrow{②-a\times①} \begin{bmatrix} 1 & d/c \\ 0 & -(ad-bc)/c \end{bmatrix}$ より,
  $ad - bc \neq 0$ なら階数は 2, $ad - bc = 0$ なら階数は 1 である.
- $a = c = 0$ のとき, $b \neq 0$ なら $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/b)\times①} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & d \end{bmatrix} \xrightarrow{②-d\times①} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 階数は 1.
  同様に, $d \neq 0$ なら $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{bmatrix} 0 & d \\ 0 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/d)\times①} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{②-b\times①} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 階数は 1.
- $a = b = c = d = 0$ のとき, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 階数は 0.

以上をまとめて,

- $ad - bc \neq 0$ ならば階数は 2,
- $ad - bc = 0$ かつ $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$ ならば階数は 1,
- $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$ ならば階数は 0.

《補足》簡約行列は以下の通り.

- $ad - bc \neq 0$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. (階数は 2)
- $ad - bc = 0$ かつ $a \neq 0$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $ad - bc = 0$ かつ $c \neq 0$ のとき $\begin{bmatrix} 1 & d/c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. (階数は 1)
  (注: $ad - bc = 0$ かつ $ac \neq 0$ ならば $b/a = d/c$.)
- $(a, c) = (0, 0)$ かつ $(b, d) \neq (0, 0)$ のとき $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. (階数は 1)
- $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$ のとき $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. (階数は 0)

$\boxed{7}$ 簡約行列の主成分の個数がもとの行列の階数である. スペースの関係で省略するが, これ以外の手順もあり得る.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ -3 & -6 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 5 & 8 \\ -3 & -6 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{③+3\times① \\ ④-①}]{②-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{②\leftrightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}\times②} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{①-3\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}\times③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[④+2\times②]{①-②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より, 簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ で, 階数は 3.

$\boxed{8}$

(1) $$\begin{bmatrix} 2 & -2a & 2-2a \\ 1+a & -a^2 & 1 \\ 2 & -a & 2-a \end{bmatrix} \xrightarrow[②\leftrightarrow③]{(1/2)\times①} \begin{bmatrix} 1 & -a & 1-a \\ 2 & -a & 2-a \\ 1+a & -a^2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-(1+a)①]{②-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & -a & 1-a \\ 0 & a & a \\ 0 & a & a^2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[③-②]{①+②} B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a(a-1) \end{bmatrix}.$$

(i) $a \neq 0, 1$ のとき, $B \xrightarrow[\frac{1}{a(a-1)}\times③]{\frac{1}{a}\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[②-③]{①-③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ より, 階数は 3.

(ii) $a = 1$ のとき, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 階数は 2.

(iii) $a = 0$ のとき, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 階数は 1.

まとめると, $a \neq 0, 1$ のとき階数は 3, $a = 1$ のとき階数は 2, $a = 0$ のとき階数は 1.

(2) $$\begin{bmatrix} b-1 & b+ab \\ b & a+ab \\ a & a^2-ab+b \end{bmatrix} \xrightarrow{①-②} \begin{bmatrix} -1 & b-a \\ b & a+ab \\ a & a^2-ab+b \end{bmatrix} \xrightarrow{-1\times①} \begin{bmatrix} 1 & a-b \\ b & a+ab \\ a & a^2-ab+b \end{bmatrix} \xrightarrow[③-a\times①]{②-b\times①} \begin{bmatrix} 1 & a-b \\ 0 & a+b^2 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{②-b\times③} \begin{bmatrix} 1 & a-b \\ 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \xrightarrow[①+③]{①-②} B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}.$$

(i) $a \neq 0$ のとき, $B \xrightarrow{\frac{1}{a}\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{③-b\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 階数は 2.

(ii) $a = 0, b \neq 0$ のとき, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{b}\times③} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{②\leftrightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 階数は 2.

(iii) $(a, b) = (0, 0)$ のとき, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 階数は 1.

まとめると, $(a, b) \neq (0, 0)$ のとき階数は 2, $(a, b) = (0, 0)$ のとき階数は 1.