数学演習第一（演習第 5 回）

微積：極値, 関数の増減, ロピタルの定理

2023 年 5 月 31 日

要点 1

極値 (微積教科書 p.32 参照)

- 関数 $f(x)$ が $x=c$ で極大であるとは, c を含む開区間 J が存在し,
$$f(x) < f(c) \qquad (x \in J,\, x \neq c)$$
を満たすことをいう．すなわち, $f(x)$ を J に制限すると, J では $f(x)$ は $x=c$ でのみ最大値をとる．このとき, $f(c)$ を c における $f(x)$ の極大値という．
- 関数 $f(x)$ が $x=c$ で極小であるとは, c を含む開区間 J が存在し,
$$f(x) > f(c) \qquad (x \in J, x \neq c)$$
を満たすことをいう．すなわち, $f(x)$ を J に制限すると, J では $f(x)$ は $x=c$ でのみ最小値をとる．このとき, $f(c)$ を c における $f(x)$ の極小値という．
- 極大値および極小値を合わせて極値という．

要点 2

関数の増減 (微積教科書 p.34 定理 2.2.5)

(1) 関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続であり, (a,b) で微分可能なとき,
$$f'(x) > 0 \ (a < x < b) \text{ ならば } f(a) < f(b) \text{ であり,}$$
$$f'(x) < 0 \ (a < x < b) \text{ ならば } f(a) > f(b) \text{ である.}$$

(2) 関数 $f(x)$ が区間 I で微分可能とする．$f'(x) > 0$ ならば $f(x)$ は単調増加であり, $f'(x) < 0$ ならば単調減少である．

要点 3

ロピタルの定理 (微積教科書 p.36 定理 2.2.7)

$f(x), g(x)$ は $x=a$ の近くで (a を除いて) 定義されていて, 微分可能とする．このとき,

$$\left.\begin{array}{rl} \text{(i)} & \displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \text{ または } \infty, \\ \text{(ii)} & a \text{ の近くで } g'(x) \neq 0, \\ \text{(iii)} & \displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ が存在する } (\pm\infty \text{ でも可}) \end{array}\right\} \implies \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

【注意】

- 便宜上, (i) の極限 0 の場合を $\frac{0}{0}$ 型の不定形, 極限 ∞ の場合を $\frac{\infty}{\infty}$ 型の不定形と呼ぶ.
- $x \to a$ を $x \to a+0$ (右極限), $x \to a-0$ (左極限), あるいは $x \to \infty$, $x \to -\infty$ (無限遠での極限) に置き換えても定理は成り立つ．但し, 条件の中の “a の近くで” は次のように読み替える必要がある: 例えば, $x \to a+0$ の場合なら “a の右側の近くで”, $x \to \infty$ の場合なら “十分に大きい数以上で” と読み替える.
- (i) の極限 ∞ の場合は, $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ のそれぞれが $\infty, -\infty$ のいずれかであると読み替えてよい.
- (ii) の条件は教科書には書かれていないが, この条件が必要な理由が $\boxed{5}$ に示されている.

1　演習問題

1 次の関数の増減を調べ, 極値を求めよ.

(1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$　　(2) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}(2 - x)$

2 次の極限値を求めよ. ただし, a, b は正の定数とする. ((1), (2), (3) は演習書 問題 3.2.2)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \log \frac{x-1}{x+1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2^{\sin x} - 2}{\log(\sin x)}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{\log(\sin ax)}{\log(\sin bx)}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x - 1}$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$

3 関数 $f(x) = \dfrac{(x+1)\log(x+1)}{\sqrt[3]{x}}$ $(x > -1,\ x \neq 0)$ について, 次の手順でグラフを完成させよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -1+0} f(x)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -0} f(x)$ 及び $\displaystyle\lim_{x\to +0} f(x)$ を計算せよ.

(3) $-1 < x < 0$ の範囲に $f(x)$ を極大にする x が存在することを確認せよ.

(4) $x > 0$ における $f(x)$ の増減を調べよ.

(5) (1)–(4) の結果から $y = f(x)$ のグラフの概形を描け.

4 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ を考える.

(1) α が自然数のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty$ が成り立つことを示せ. (hint: α に関する帰納法)

(2) $0 < \alpha < 1$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty$ が成り立つことを示せ.

(3) $\alpha > 0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty$ が成り立つことを示せ.
(hint: $\alpha = n + a, n \in \mathbb{N}, 0 < a < 1$ とおき、n に関する帰納法)

5 関数 $\varphi(x) = x^4\left(\cos\dfrac{1}{x^2} + 2x^2 \sin\dfrac{1}{x^2}\right)$, $\psi(x) = x^3\left(4 + 3x^2\sin\dfrac{2}{x^2}\right)$ $(x \neq 0)$ について以下の問いに答えよ. (この問題はロピタルの定理の適用限界を示す 1 つの例)

(1) $\varphi'(x), \psi'(x)$ を計算せよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \lim_{x\to 0}\psi(x) = \lim_{x\to 0}\varphi'(x) = \lim_{x\to 0}\psi'(x) = 0$ であることを示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \lim_{x\to 0}\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}$ を求めよ. 但し, $\varphi'(x)$ は $x = 0$ の近くに無数の零点をもつが, $\dfrac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}$ については約分することにより $x \neq 0$ で定義された関数と見なせる.

(4) $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, $g(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ とおけば, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ であり, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (約分して考える) はともに存在するが, その値は異なる. これを示せ.

※ この問題は `http://kobayashi.hub.hit-u.ac.jp/topics/lhopital.pdf` を参考にした.

2　レポート課題

答だけでなく考え方 (計算過程) も書いて下さい.

$\boxed{\text{問題 1}}$　関数 $f(x) = xe^{-x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ のすべての極値と各極値を与える x の値を求めよ.

$\boxed{\text{問題 2}}$　関数 $f(x) = \sqrt[5]{x}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x$ $(x \in \mathbb{R})$ の増減を調べよ.

$\boxed{\text{問題 3}}$　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Sin}^{-1}x}{\sin x}$ を求めよ.

$\boxed{\text{問題 4}}$　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x}\log|x|$ を求めよ.