数学演習第一（演習第 6 回）【解答例】

線形：連立 1 次方程式 (2023 年 6 月 7 日実施)

【注】 以下では, 問題の〈例〉と同じく, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ に対して, 拡大係数行列 $[A\ \ \boldsymbol{b}]$ の簡約行列 $[C\ \ \boldsymbol{d}]$ を拡大係数行列にもつ連立 1 次方程式 $C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$ を考えるとき, 「$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は $C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$ に簡約化される」「$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を簡約化して $C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$ を得る」といった言い方をした.

1 演習問題

$\boxed{1}$ (1) $[A\ \ \boldsymbol{b}]$ を簡約化して得られる連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x_1 \quad - x_3 \quad + 2x_5 = -3 \\ \quad x_2 + 3x_3 \quad - 2x_5 = 1 \\ \qquad\qquad x_4 - \frac{1}{2}x_5 = 4 \end{cases}$$

であり, 主成分に対応する変数は x_1, x_2, x_4.

(2) 主成分に関係しない変数を $x_3 = s$, $x_5 = t$ とおいて, 求める解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3+s-2t \\ 1-3s+2t \\ s \\ 4+\frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{どちらの形でもよい}} \quad (s,t \text{ は任意定数}).$$

【注】解の表示に分数が現れないように $x_5 = 2t$ とおいてもよい ((3) の解答例はそのようにした).

(3) A の簡約行列は明らかに $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であり, 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は

$$\begin{cases} x_1 \quad - x_3 \quad + 2x_5 = 0 \\ \quad x_2 + 3x_3 \quad - 2x_5 = 0 \\ \qquad\qquad x_4 - \frac{1}{2}x_5 = 0 \end{cases}$$

と簡約化される. よって, $x_3 = s$, $x_5 = 2t$ とおいて, 求める解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-4t \\ -3s+4t \\ s \\ t \\ 2t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (s,t \text{ は任意定数}).$$

【注】(2) の解答例と同じように $x_5 = t$ とおいて解を表現してもよい.

$\boxed{2}$ (i) (問題 8.2.9 (1)) 拡大係数行列を簡約化すると,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 21 \\ 1 & 2 & 1 & 14 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 2 & 3 & 2 & 21 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+①]{②-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 0 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{-②} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[③-3\times②]{①-2\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\times③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{①-③} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right].$$

よって, 連立 1 次方程式は $\begin{cases} x \qquad\quad = 3 \\ \quad y \qquad = 7 \\ \qquad z = -3 \end{cases}$ と簡約化されるので, 求める解は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$.

(ii) (問題 8.2.10 (1)) 拡大係数行列を簡約化すると,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow[③-①]{②-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-②]{①-②} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -8 & 35 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

よって, 連立 1 次方程式は $\begin{cases} x_1 \quad\quad - 8x_3 = 35 \\ \quad\; x_2 + 5x_3 = -22 \end{cases}$ と簡約化されるので, $x_3 = t$ とおいて, 求める解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35+8t \\ -22-5t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ -22 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

(iii) (問題 8.2.10 (2)) 拡大係数行列を簡約化すると, $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 3 \\ -2 & 4 & 6 & -6 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[③+①]{②+2\times①} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. よって, 連立 1 次方程式は $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3$ と簡約化されるので, $x_2 = s$, $x_3 = t$ とおいて, 求める解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2s+3t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$

(iv) (問題 8.2.10 (3)) 拡大係数行列を行基本変形して,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[③-①]{②-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -24 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-②} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{array}\right].$$

よって, (係数行列の階数) $= 2 \neq 3 =$ (拡大係数行列の階数) となるので, 解なし.

$\boxed{3}$ (1) 行列表示すれば $\begin{bmatrix} a+1 & 3a \\ 1 & a+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. よって, $(a+1)(a+2) - 3a = a^2 + 2 > 0$ に注意して,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+1 & 3a \\ 1 & a+2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2+2}\begin{bmatrix} a+2 & -3a \\ -1 & a+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{a^2+2}\begin{bmatrix} 7a+2 \\ -2a-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7a+2}{a^2+2} \\ -\frac{2a+3}{a^2+2} \end{bmatrix}}_{\text{どちらの形でもよい}}.$$

(2) 拡大係数行列を簡約化して,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 11 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 8 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 13 & 4 & a \end{array}\right] \xrightarrow{①-③} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 8 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 13 & 4 & a \end{bmatrix} \xrightarrow[④-3\times①]{③-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 19 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 28 & a+3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[④+2\times2]{\substack{①-② \\ ③+②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & a-5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{20}\times③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & a-5 \end{bmatrix} \xrightarrow[④-30\times③]{\substack{①+9\times③ \\ ②-③}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right].$$

よって, $a \neq 5$ ならば明らかに解なし. $a = 5$ ならば連立 1 次方程式は $\begin{cases} x_1 \quad\quad + 5x_3 \quad\quad = 3 \\ \quad\; x_2 - 2x_3 \quad\quad = -4 \\ \quad\quad\quad\quad\quad x_4 = 0 \end{cases}$ と簡約化されるので, 求める解は $x_3 = t$ とおいて

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-5t \\ -4+2t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

$\boxed{4}$ 係数行列を簡約化して解を求める.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 9 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 5 & 15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるから, 連立 1 次方程式は $\begin{cases} x \quad\quad + 6z = 0 \\ \quad\; y + 3z = 0 \end{cases}$ と簡約化される. 解は $z = t$ とおいて

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6t \\ -3t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

これより, 基本解は $\begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ で解の自由度は 1.

(2) $\begin{bmatrix}1&1&0&1\\3&1&1&1\\0&2&-1&2\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&-2&1&-2\\0&2&-1&2\\0&-2&1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&1&-\frac{1}{2}&1\\0&2&-1&2\\0&-2&1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&-\frac{1}{2}&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ であるから, 連立 1 次方程式は $\begin{cases} x_1 \quad + \frac{1}{2}x_3 \quad = 0 \\ \quad x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ と簡約化される. 解は $x_3 = 2s,\ x_4 = t$ とおいて

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-s\\s-t\\2s\\t\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\quad (s,t \text{ は任意定数}).$$

これより, 基本解は $\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$ で, 解の自由度は 2.

$\boxed{5}$ $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ の 1 次関係式 $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3+c_4\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{0}$ は c_1,c_2,c_3,c_4 を変数とする同次連立 1 次方程式

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{bmatrix}=\boldsymbol{0} \tag{$*$}$$

と見なせる. 係数行列を簡約化すると,

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&2\\2&0&1&3\\-1&1&3&k\\0&1&2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&2\\0&-4&-5&-1\\0&3&6&k+2\\0&1&2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&2\\0&1&2&1\\0&-4&-5&-1\\0&3&6&k+2\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&2&1\\0&0&3&3\\0&0&0&k-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&1\\0&0&0&k-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&k-1\end{bmatrix}.$$

(1) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ が 1 次独立とは $(*)$ の解が $c_1=c_2=c_3=c_4=0$ に限られることであるから, 求める条件は $k\neq 1$.

(2) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ が 1 次従属とは $(*)$ が自明でない解をもつことであるから, 求める条件は $k=1$. このとき $(*)$ の解は $c_1=-t,\ c_2=t,\ c_3=-t,\ c_4=t$ (t は任意定数). 特に, $t=-1$ と選び, 非自明な 1 次関係式 $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{0}$ を得る.

$\boxed{6}$ 説明の便宜のため, 係数行列を $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&a\\a&b&1\end{bmatrix}$, 拡大係数行列を $B=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&1&a&b\\a&b&1&1\end{array}\right]$ とおく. まず, B に行基本変形を施して,

$$B=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&a&b\\a&b&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&a-1&b-1\\0&b-a&1-a&1-a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&b-a&1-a&1-a\\0&0&a-1&b-1\end{bmatrix}(=B_1 \text{ とおく}).$$

(1)
- $b\neq a\neq 1$ (i.e., $a\neq b$ かつ $a\neq 1$) のとき, 明らかに $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B=3$.
- $b=a=1$ のとき, $B_1=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ となり, $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B=1$.
- $b=a\neq 1$ のとき, $B_1\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ となり, $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B=2$.
- $b\neq a=1$ のとき, $B_1=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&b-1&0&0\\0&0&0&b-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ となり, $\operatorname{rank}A=2$, $\operatorname{rank}B=3$.

【注】階数を求めるだけなら上の形まで変形すれば十分. (勿論, 簡約行列まで求めてもよい.)

(2)
- $b\neq a=1$ のとき, $\operatorname{rank}A=2<3=\operatorname{rank}B$ より, 解なし.
- $b\neq a\neq 1$ のとき,

$$B_1\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&\frac{a-1}{a-b}&\frac{a-1}{a-b}\\0&0&1&\frac{b-1}{a-1}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{b-1}{a-1}\\0&1&0&1\\0&0&1&\frac{b-1}{a-1}\end{bmatrix} \text{ より, } \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{b-1}{a-1}\\1\\\frac{b-1}{a-1}\end{bmatrix} \text{ (ただ 1 つの解).}$$

- $b=a\neq 1$ のとき, $B_1 \to \begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ (無数の解).
- $b=a=1$ のとき, $B_1 \to \begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ (無数の解).

(3)
- $b\neq a=1$ のとき, 解集合は空集合.
- $b\neq a\neq 1$ のとき, 解集合は 1 点 $\left(-\dfrac{b-1}{a-1},\,1,\,\dfrac{b-1}{a-1}\right)$.
- $b=a\neq 1$ のとき, 解集合は点 $(0,0,1)$ を通り, $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ を方向ベクトルとする直線となる. すなわち, 解集合は直線 $-x=y,\ z=1$.
- $b=a=1$ のとき, 解集合は点 $(1,0,0)$ を通り, $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ に平行な平面となる. 法線ベクトルが $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ で与えられるから, 解集合は平面 $(x-1)+y+z=0$, 整理して $x+y+z=1$.

2　レポート問題

I (1) $\begin{bmatrix}3&-4\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-9\end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-4\\5&6\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}7\\-9\end{bmatrix}=\dfrac{1}{38}\begin{bmatrix}6&4\\-5&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\-9\end{bmatrix}=\dfrac{1}{38}\begin{bmatrix}6\\-62\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{19}\\-\frac{31}{19}\end{bmatrix}$.

(2) $\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&1\\2&3&-1&-5\\3&-1&4&k\end{array}\right]\xrightarrow[\text{③}-3\times\text{①}]{\text{②}-2\times\text{①}}\begin{bmatrix}1&-2&3&1\\0&7&-7&-7\\0&5&-5&k-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{7}\times\text{②}}\begin{bmatrix}1&-2&3&1\\0&1&-1&-1\\0&5&-5&k-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{①}+2\times\text{②}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&-1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&k+2\end{array}\right]$

と変形される. これより,

- $k\neq -2$ のとき, 解なし.
- $k=-2$ のとき, $\begin{cases}x \qquad +z=-1\\ \qquad y-z=-1\end{cases}$ と簡約化されるので, $z=t$ とおいて, 求める解は

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-t\\-1+t\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\quad (t\text{ は任意定数}).$$

(3) 拡大係数行列を簡約化すると,

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&3&-2&3\\2&-1&5&-3&4\\1&1&1&0&-1\\1&-4&6&-5&9\end{array}\right]\xrightarrow[\text{④}-\text{①}]{\substack{\text{②}-2\times\text{①}\\ \text{③}-\text{①}}}\begin{bmatrix}1&-1&3&-2&3\\0&1&-1&1&-2\\0&2&-2&2&-4\\0&-3&3&-3&6\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{④}+3\times\text{②}]{\substack{\text{①}+\text{②}\\ \text{③}-2\times\text{②}}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&2&-1&1\\0&1&-1&1&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right].$$

連立 1 次方程式は $\begin{cases}x_1 \qquad +2x_3-x_4=\ \ 1\\ \qquad x_2-\ \ x_3+x_4=-2\end{cases}$ と簡約化されるので, $x_3=s,\ x_4=t$ とおいて, 求める解は

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2s+t\\-2+s-t\\s\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\quad (s,t\text{ は任意定数}).$$

II $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$ は $\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1&\boldsymbol{a}_2&\boldsymbol{a}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$ と書かれることに注意する.

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1&\boldsymbol{a}_2&\boldsymbol{a}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&k\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{③}-3\times\text{①}]{\text{②}-2\times\text{①}}\begin{bmatrix}1&4&7\\0&-3&-6\\0&-6&k-21\end{bmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{3}\times\text{②}}\begin{bmatrix}1&4&7\\0&1&2\\0&-6&k-21\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{③}+6\times\text{②}]{\text{①}-4\times\text{②}}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&k-9\end{bmatrix}$$

と変形されるから, $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ が 1 次従属であるための条件は $k=9$ であること. 更に, このとき, c_1,c_2 に関する連立 1 次方程式は $\begin{cases}c_1 \qquad -\ \ c_3=0\\ \qquad c_2+2c_3=0\end{cases}$ と簡約化されるので, $c_3=t$ とおいて, $\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\-2t\\t\end{bmatrix}$. よって, $t=1$ ととることにより, 1 つの非自明な 1 次関係式は $\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$.