数学演習第一（演習第 7 回）【解答例】

微積： 高次の導関数, テーラーの定理, 有限テーラー展開（2023 年 6 月 21 日実施）

1　演習問題

1　$f(x)$ は明らかに $x \neq 0$ において C^∞ 級であり, そこでの導関数は

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

また, $x = 0$ における微分係数は

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0 \quad (\text{最後の等号は } |h\sin(1/h)| \leqslant |h| \to 0 \text{ による}).$$

よって, $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で微分可能であり, その導関数は

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

で与えられる．ここで, $x \to 0$ のとき, $x\sin(1/x) \to 0$ であるが, $\cos(1/x)$ は 1 つの値に近づき得ないので $f'(x)$ は $x = 0$ で連続でない．(より直接的には, 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = 1/(n\pi)$ で定めれば, $n \to \infty$ のとき, $a_n \to 0$ であるが, $f'(a_n) = -(-1)^n \not\to 0 = f'(0)$ であるから, $f'(x)$ は $x = 0$ で連続でない.) よって, $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で微分可能だが, $x = 0$ の周りで C^1 級でない.

2　まず, 仮定より $x = \varphi(t)$ の逆関数 $t = \varphi^{-1}(x)$ が存在し, $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ と書ける．よって, y を x で微分すれば, 合成関数・逆関数の微分公式を用いて,

$$\frac{dy}{dx} = \{\psi(\varphi^{-1}(x))\}' = \psi'(\varphi^{-1}(x))\{\varphi^{-1}(x)\}' = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad (x = \varphi(t)).$$

次に, $\omega(t) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ とおけば, $\dfrac{dy}{dx} = \omega(\varphi^{-1}(x))$ と書けるから, 上と同じ論法で $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \{\omega(\varphi^{-1}(x))\}' = \dfrac{\omega'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$. ここで, $\omega'(t) = \dfrac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'(t)^2}$ より,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'(t)^3} \quad (x = \varphi(t)).$$

次のように表現することもできる:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

3　(n の範囲がなければ $n \geqslant 0$ で正しいことを意味する.)

(0) ① $y = e^x$ は微分に対して不変であるから, 明らかに $y^{(n)} = e^x$. ②,③ $(\cos x)' = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$, $(\sin x)' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ であるから, $\cos x$, $\sin x$ はともに 1 回微分するごとに “偏角” が $\frac{\pi}{2}$ ずつ増えていく．よって, $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$, $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$. ④ $y = x^\alpha$ のとき, $y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ $(n \geqslant 1)$. 特に, $y = 1/x = x^{-1}$ $(\alpha = -1)$ のとき, $y^{(n)} = (-1)(-2)\cdots(-n)x^{-n-1} = (-1)^n n!/x^{n+1}$. ⑤ $(\log x)^{(n)} = (1/x)^{(n-1)} = (-1)^{n-1}(n-1)!/x^n$ $(n \geqslant 1)$.

(1) $y' = f'(ax+b)\cdot(ax+b)' = af'(ax+b)$. これを繰り返して, $y^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$.

(2) $y = \frac{1}{2}(\log(1+x) - \log(1-x)) = \frac{1}{2}(\log(1+x) - \log((-1)x+1))$ より, (0)⑤と (1) を用いて, $y = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2}\left\{\frac{1}{(1+x)^n} - \frac{(-1)^n}{(1-x)^n}\right\}$ $(n \geqslant 1)$.

(3) $y = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ より, (0)②と (1) を用いて, $y^{(n)} = \frac{1}{2}\cdot 2^n\cos(2x + \frac{n\pi}{2}) = 2^{n-1}\cos(2x + \frac{n\pi}{2})$.

(4) $y = \dfrac{1}{(1-x)(1+2x)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{2}{1+2x}\right)$ と部分分数分解し, (0)④と (1) の結果を用いて,

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{1+x-2x^2}\right)^{(n)} = \frac{1}{3}\left\{\frac{(-1)^n(-1)^n n!}{(1-x)^{n+1}} + \frac{2\cdot 2^n(-1)^n n!}{(1+2x)^{n+1}}\right\} = \frac{n!}{3}\left\{\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{(1+2x)^{n+1}}\right\}.$$

(5) $y=x^2e^{-2x}$ より, $y'=2xe^{-2x}+x^2(-2e^{-2x})=-2(x^2-x)e^{-2x}$. $n\geqslant 2$ のときは Leibniz の公式を用いて,

$$\begin{aligned}y^{(n)}&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2)^{(k)}(e^{-2x})^{(n-k)}=x^2(e^{-2x})^{(n)}+n\cdot 2x(e^{-2x})^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2(e^{-2x})^{(n-2)}\\&=\left\{(-2)^nx^2+2n(-2)^{n-1}x+n(n-1)(-2)^{n-2}\right\}e^{-2x}=\underbrace{(-2)^n\left\{x^2-nx+\tfrac{1}{4}n(n-1)\right\}e^{-2x}}_{\text{この式は } n=0,1 \text{ でも正しい}}.\end{aligned}$$

(6) $y=e^{-x}\cos x$ より, $y'=e^{-x}(-\cos x-\sin x)=-\sqrt{2}\,e^{-x}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)=-\sqrt{2}\,e^{-x}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. これを繰り返して, $y^{(n)}=(-\sqrt{2}\,)^ne^{-x}\cos\left(x-\frac{n\pi}{4}\right)$. ($\{e^{-x}\cos(x+\alpha)\}'=-\sqrt{2}\,e^{-x}\cos(x+\alpha-\frac{\pi}{4})$ (α は定数) であることに注意.) Leibniz の公式を用いた表現も可能: $y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}e^{-x}\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$.

(7) $y^{(n)}=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)x^{-\frac{1}{2}-n}=(-1)^n\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}-n}=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^nx^{(2n+1)/2}}$.

4 以下, N 次剰余項 $R_N(x)$ の表現式の中の θ は $0<\theta<1$ を満たす適当な数 (x,N に依存) を表す.

(0) ① $f(x)=e^x$ より, $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1$ ($n\geqslant 0$). よって,

$$e^x=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{x^n}{n!}+R_N(x),\quad R_N(x)=\frac{e^{\theta x}}{N!}x^N.$$

$N=6$ なら, $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+R_6(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+R_6(x)$.

② $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$, $f^{(n)}(0)=\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^m & (n=2m)\\ 0 & (n=2m+1)\end{cases}$ ($n\geqslant 0$) より,

$$\cos x=\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}+R_{2M}(x),\quad R_{2M}(x)=\frac{\cos(\theta x+\frac{2M\pi}{2})}{(2M)!}x^{2M}=\frac{(-1)^M\cos\theta x}{(2M)!}x^{2M}.$$

$M=3$ なら, $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+R_6(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+R_6(x)$.

③ $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$, $f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0 & (n=2m)\\ (-1)^m & (n=2m+1)\end{cases}$ ($n\geqslant 0$) より,

$$\sin x=\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}+R_{2M+1}(x),$$

$$R_{2M+1}(x)=\frac{\sin(\theta x+\frac{(2M+1)\pi}{2})}{(2M+1)!}x^{2M+1}=\frac{(-1)^M\cos\theta x}{(2M+1)!}x^{2M+1}.$$

$M=3$ なら, $\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+R_7(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+R_7(x)$.

④ $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^nn!}{(1+x)^{n+1}}$ ($n\geqslant 0$) より, $f^{(n)}(0)=(-1)^nn!$ ($n\geqslant 0$). よって, $x>-1$ に対して,

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^nx^n+R_N(x),\quad R_N(x)=\frac{(-x)^N}{(1+\theta x)^{N+1}}\underbrace{=\frac{(-x)^N}{1+x}}_{\text{等比数列の和の公式による}}.$$

$N=6$ なら, $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+R_6(x)$.

⑤ $f(x)=\log(1+x)$ より, $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ ($n\geqslant 1$). 故に, $f(0)=0$, $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$ ($n\geqslant 1$). よって, $x>-1$ に対して,

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+R_N(x),\quad R_N(x)=\frac{(-1)^{N-1}}{N(1+\theta x)^N}x^N.$$

$N=6$ なら, $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+R_6(x)$.

(1) $\boxed{3}$ (7) の結果から, $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n(1+x)^{n+\frac{1}{2}}}$, $f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n}$, $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}$ ($n\geqslant$

0). よって, $x>-1$ に対して,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+R_N(x),\quad R_N(x)=\frac{(2N-1)!!}{(2N)!!}\frac{(-x)^N}{(1+\theta x)^{N+\frac{1}{2}}}.$$

$N=6$ なら, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2-\dfrac{5}{16}x^3+\dfrac{35}{128}x^4-\dfrac{63}{256}x^5+R_6(x).$

(2) $f(x)=\cosh x$ より, $f^{(2m)}(x)=\cosh x, f^{(2m+1)}(x)=\sinh x$; $f^{(2m)}(0)=1, f^{(2m+1)}(0)=1$ $(m\geqslant 0)$. 故に,

$$\cosh x=\sum_{m=0}^{M-1}\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+R_{2M}(x),\quad R_{2M}(x)=\frac{\cosh\theta x}{(2M)!}x^{2M}.$$

$M=3$ なら, $\cosh x=1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+R_6(x).$

(3) $f(x)=\sinh x$ より, $f^{(2m)}(x)=\sinh x, f^{(2m+1)}(x)=\cosh x$; $f^{(2m)}(0)=0, f^{(2m+1)}(0)=1$ $(m\geqslant 0)$. 故に,

$$\sinh x=\sum_{m=0}^{M-1}\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}+R_{2M+1}(x),\quad R_{2M+1}(x)=\frac{\cosh\theta x}{(2M+1)!}x^{2M+1}.$$

$M=3$ なら, $\sinh x=x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+R_7(x).$

5 $n\geqslant 2$ のとき, $f(x)=x^2\cos x$ に Leibniz の公式を適用して,

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)&=x^2(\cos x)^{(n)}+n\cdot 2x\,(\cos x)^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\,(\cos x)^{(n-2)}\\&=x^2\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+2nx\cos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)+n(n-1)\cos\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)\\&=x^2\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+2nx\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+n(n-1)\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}-\pi\right)\\&=\{x^2-n(n-1)\}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+2nx\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

この式は $n=0,1$ でも正しい. よって, $p_n(x)=x^2-n(n-1)$, $q_n(x)=2nx$.

6 (1) $x^p=\{1+(x-1)\}^p=\sum_{n=0}^{p}\binom{p}{n}(x-1)^n$. $(R_N(x)=0)$

(2) $\left(\dfrac{1}{x^p}\right)^{(n)}=(-p)(-p-1)\cdots(-p-n+1)\dfrac{1}{x^{p+n}}=(-1)^np(p+1)\cdots(p+n-1)\dfrac{1}{x^{p+n}}=(-1)^n\dfrac{(n+p-1)!}{(p-1)!}\dfrac{1}{x^{p+n}}$

より, $\dfrac{1}{x^p}=\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\dbinom{n+p-1}{n}(x-1)^n+R_N(x)$, $R_N(x)=\dbinom{N+p-1}{N}\dfrac{(-1)^N(x-1)^N}{\{1+\theta(x-1)\}^{N+p}}$ $(0<\theta<1)$.

7 (1) 最初に $\dfrac{d^n}{dx^n}f(-x)=(-1)^nf^{(n)}(-x)$ に注意する.

- $f(x)$ が奇関数のとき: $f(-x)=-f(x)$ の両辺を $2m$ 回微分して, $f^{(2m)}(-x)=-f^{(2m)}(x)$. これより $f^{(2m)}(0)=-f^{(2m)}(0)$, すなわち $f^{(2m)}(0)=0$ が得られ, $a_{2m}=\dfrac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!}=0$.
- $f(x)$ が偶関数のとき: $f(-x)=f(x)$ の両辺を $2m+1$ 回微分して, $-f^{(2m+1)}(-x)=f^{(2m+1)}(x)$. これより $-f^{(2m+1)}(0)=f^{(2m+1)}(0)$, すなわち $f^{(2m+1)}(0)=0$ が得られ, $a_{2m+1}=\dfrac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!}=0$.

(2) ① $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f''(x)=\dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$ より, $(1-x^2)f''(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=xf'(x)$.

② $(1-x^2)f''(x)=xf'(x)$ の両辺を n 回 $(n\geqslant 1)$ 微分すると, Leibniz の公式により

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-n\cdot 2xf^{(n+1)}(x)-\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2f^{(n)}(x)=xf^{(n+1)}(x)+nf^{(n)}(x).$$

これを整理して, $(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+1)xf^{(n+1)}(x)-n^2f^{(n)}(x)=0$. ($n=0$ での成立は明らか).

③ $n=2m-1$ $(m\geqslant 1)$ の場合の ② の関係式に $x=0$ を代入して, $f^{(2m+1)}(0)=(2m-1)^2f^{(2m-1)}(0)$. この関係式を繰り返し用いて, $m\geqslant 1$ に対し

$$f^{(2m+1)}(0)=(2m-1)^2f^{(2m-1)}(0)=\cdots=(2m-1)^2\cdots 3^2\cdot 1^2\,f'(0)=\{(2m-1)!!\}^2.$$

ここで, $f'(0)=1$ を用いた. $(-1)!!=1$ に注意すれば, $f^{(2m+1)}(0)=\{(2m-1)!!\}^2$ $(m\geqslant 0)$.

④ $a_{2m+1}=\dfrac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!}=\dfrac{\{(2m-1)!!\}^2}{(2m+1)!!(2m)!!}=\dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\dfrac{1}{2m+1}\quad (m\geqslant 0).$

(3) ① $f(x)=\tan x$ より，$f'(x)=1+\tan^2 x=1+f(x)^2$.

② $n\geqslant 1$ のとき $f'(x)=1+f(x)^2$ を n 回微分して，$f^{(n+1)}(x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f^{(n-j)}(x)f^{(j)}(x)$. $n=0$ のときは $f'(x)=1+f(x)^2$.

③ $f^{(2k)}(0)=0$ より，

$$f^{(2m+1)}(0)=\sum_{j=0}^{2m}\binom{2m}{j}f^{(2m-j)}(0)f^{(j)}(0)=\sum_{k=0}^{m-1}\binom{2m}{2k+1}f^{(2m-2k-1)}(0)f^{(2k+1)}(0)\quad (m\geqslant 1).$$

④ $a_{2m+1}=\dfrac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!}=\dfrac{(2m)!}{(2m+1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\dfrac{f^{(2m-2k-1)}(0)f^{(2k+1)}(0)}{(2m-2k-1)!(2k+1)!}=\dfrac{1}{2m+1}\sum_{k=0}^{m-1}a_{2m-2k-1}a_{2k+1}\ (m\geqslant 1).$

⑤ $a_1=f'(0)=1$ と④の関係式を用いて，

$$a_1=1,\quad a_3=\frac{1}{3}a_1^2=\frac{1}{3},\quad a_5=\frac{1}{5}(a_3a_1+a_1a_3)=\frac{2}{15},\quad a_7=\frac{1}{7}(a_5a_1+a_3^2+a_1a_5)=\frac{17}{315}.$$

2 レポート課題

問 1 ライプニッツの公式より，$(x^2f(ax+b))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(f(ax+b))^{(n-k)}(x^2)^{(k)}=(f(ax+b))^{(n)}x^2+n\cdot(f(ax+b))^{(n-1)}\cdot 2x+\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot(f(ax+b))^{(n-2)}\cdot 2$ となる．これを整理して，

$$(x^2f(ax+b))^{(n)}=\boxed{x^2a^nf^{(n)}(ax+b)+2nxa^{n-1}f^{(n-1)}(ax+b)+n(n-1)a^{n-2}f^{(n-2)}(ax+b)}\quad (n\geqslant 2).$$

$n=1$ のときには，$(x^2f(ax+b))'=\boxed{x^2\cdot af'(ax+b)+2xf(ax+b)}$.

問 2 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-2x}=-\dfrac{\frac{1}{2}(1-2x)-\frac{3}{2}}{1-2x}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{1-2x}$ なので，$f^{(n)}(x)=\boxed{3\cdot 2^{n-1}n!(1-2x)^{-n-1}}\ (n\geqslant 1)$.

【別法】ライプニッツの公式より，$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\{(1-2x)^{-1}\}^{(n-k)}(1+x)^{(k)}=\{(1-2x)^{-1}\}^{(n)}(1+x)+n\{(1-2x)^{-1}\}^{(n-1)}=2^nn!(1-2x)^{-n-1}(1+x)+n\cdot 2^{n-1}(n-1)!(1-2x)^{-n}=3\cdot 2^{n-1}n!(1-2x)^{-n-1}$.

問 3 ライプニッツの公式より，$\{f_n(x)\}^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^{n-1})^{(n-k)}(\log x)^{(k)}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!}x^{k-1}\cdot(-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k}$ となる．よって，$\{f_n(x)\}^{(n)}=x^{-1}(n-1)!\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}$ を得る．一方，

$$0=(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$$

より，$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}=1$ なので，$\{f_n(x)\}^{(n)}=\boxed{x^{-1}(n-1)!}$.

問 4 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{5}\right)$ とする．

$$f'(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{5}\right),\quad f''(x)=-4\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right),\quad f'''(x)=-8\cos\left(2x+\frac{\pi}{5}\right),$$
$$f^{(4)}(x)=16\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right),\quad f^{(5)}(x)=32\cos\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$$

となる．よって，

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{\pi}{5}\left(1+\frac{-4}{2!}x^2+\frac{16}{4!}x^4\right)+\cos\frac{\pi}{5}\left(\frac{2}{1!}x+\frac{-8}{3!}x^3\right)+R_5(x)$$
$$=\boxed{\sin\frac{\pi}{5}\left(1-2x^2+\frac{2}{3}x^4\right)+\cos\frac{\pi}{5}\left(2x-\frac{4}{3}x^3\right)+R_5(x)}$$

となる．ただし，$R_5(x)=\boxed{\dfrac{4}{15}\cos\left(2\theta x+\dfrac{\pi}{5}\right)x^5}$.